

35

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. VICTOR ROUQUET

Agrégé de l'Université, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE
D'UN SYSTÈME SONT PLANES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le novembre 1882, devant la Commission d'examen

MM. COMBESCORE, *Président.*

VIGUIER, }
SAUVAGE, } *Examineurs.*

TOULOUSE

IMPRIMERIE DOULADOURE-PRIVAT

RUE SAINT-ROME, 39

1882

35

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

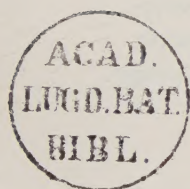
PAR M. P. V. ROUQUET

Agrégé de l'Université, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE
D'UN SYSTÈME SONT PLANES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le novembre 1882, devant la Commission d'examen.



MM. COMBESCURE, *Président.*

VIGUIER, }
SAUVAGE, } *Examineurs.*

TOULOUSE

IMPRIMERIE DOULADOURE-PRIVAT

RUE SAINT-ROME, 39

1882

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

MM.

DOYEN	DE ROUVILLE, Professeur, Géologie et Minéralogie.
DOYEN HONORAIRE	CHANCEL, Recteur de l'Académie de Montpellier.
PROFESSEURS	ROCHE (suppléé par M. SAUVAGE). Analyse.
	COMBESCURE..... Astronomie.
	CROVA..... Physique.
	SABATIER..... Zoologie.
	MARGOTTET..... Chimie.
MAITRE DE CONFÉRENCES.	VIGUIER..... Mécanique.
	FLAHAULT..... Botanique.
SECRÉTAIRE	THOULET..... Physique et Minéralogie.
	GRANGÉ.

A MON PÈRE, A MA MÈRE

A LA MÉMOIRE

DU DOCTEUR GUILHEM-MAURY

MON BEAU-PÈRE

V. ROUQUET



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553809_0101

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE D'UN SYSTÈME SONT PLANES

INTRODUCTION

L'objet du présent travail est de donner la définition géométrique des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système (que nous appellerons le premier), celles de l'autre système étant d'abord supposées planes ou sphériques, puis n'étant assujetties à aucune condition particulière.

Proposé pour la première fois par Monge (*application de l'analyse à la géométrie*) au sujet des surfaces dont les normales touchent une développable donnée; résolu par Dupin (1803) dans les cas où les lignes de courbure sont circulaires pour les deux systèmes ou pour un seul; traité par Joachimstal, à l'aide d'un théorème devenu classique (*Journal de Crelle*, t. XXX), pour le cas où les lignes de courbure d'un système sont situées dans des plans passant par une même droite, le problème dont nous nous occupons a reçu, déjà depuis longtemps, une solution analytique complète, grâce surtout aux travaux de MM. J.-A. Serret (*Journal de mathématiques*, t. XVIII, 1853) et O. Bonnet, auquel est due la première solution du problème envisagé dans toute sa généralité,

savoir la recherche de l'équation intégrale des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système (*Journal de l'École polytechnique*, t. XX).

Après avoir indiqué comment on pourrait obtenir cette équation avec les quatre fonctions arbitraires qu'elle comporte, M. O. Bonnet montre que la construction effective des surfaces qu'il vient de trouver dépend de celle des surfaces plus particulières dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône (l. c., p. 208). Il fait ensuite d'élégantes applications de sa méthode d'intégration et donne, en même temps, les formules relatives aux rayons de courbure principaux et aux développées des surfaces étudiées.

De son côté, M. J.-A. Serret est revenu, peu de temps après, aux surfaces à lignes de courbure planes pour un système, à l'occasion de son mémorable travail sur les surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont sphériques (*C. R.*, t. XLII, 1856). Quelques-uns des résultats obtenus par MM. J.-A. Serret et O. Bonnet ont été présentés par M. A. Picart (*Thèses* 1863), à l'aide de considérations géométriques qui l'ont conduit à de nouvelles propriétés, sans fournir toutefois la construction intégrale des surfaces dont nous venons de parler.

Plus récemment, M. Lemonnier (*Thèses* 1868) a développé, avec de nombreux détails et en l'accompagnant d'exemples intéressants, la méthode d'abord employée par M. J.-A. Serret pour l'étude des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes, ou planes dans un système et sphériques dans l'autre, ou sphériques dans les deux systèmes.

II

Dans leurs recherches sur les surfaces ayant une représentation sphérique donnée, MM. G. Darboux (*C. R.*, t. LXVIII, 1869) et A. Ribaucour (*Mémoire pour le prix Dalmont*¹) ont été amenés à s'occuper des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système. Elles sont

1. Ce Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences en 1876, n'a pas été encore publié. J'en dois la communication à l'obligeance de l'auteur.

caractérisées, comme on sait, par cette condition que l'une des familles du réseau sphérique, image de leurs lignes de courbure, soit composée uniquement de cercles.

Si l'on suppose que l'image sphérique soit entièrement connue, la détermination des surfaces correspondantes dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, de la forme étudiée par Laplace. M. G. Darboux a fait remarquer que l'intégration de cette équation est ramenée aux quadratures dans un nombre illimité de cas, parmi lesquels il a principalement signalé ceux qui correspondent aux surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes ou sphériques.

Il résulte de cette observation importante que, si l'on connaît une famille de cercles tracés sur une sphère, ainsi que leurs trajectoires orthogonales, on connaîtra, par cela même, toutes les surfaces en nombre infini admettant ce réseau pour image sphérique de leurs lignes de courbure. Par exemple, les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes peuvent être regardées comme connues d'après ce qui précède, puisque le réseau sphérique correspondant, composé de cercles pour chaque famille, est défini géométriquement et analytiquement, ce qui signifie que l'on sait exprimer les coordonnées des points de la sphère en fonction explicite des paramètres caractéristiques d'un semblable réseau.

Revenant maintenant au problème des surfaces à lignes de courbure planes pour un système, nous voyons que la solution est ramenée à trouver l'intégrale générale des réseaux sphériques orthogonaux dont les lignes d'une famille sont des cercles.

Nous rappellerons que M. A. Ribaucour a fait connaître à cet égard (C. R., t. LXXVI, 1873) une propriété fort utile dans certaines circonstances, et qui convient non seulement à toute famille de cercles tracés sur un plan ou une sphère, mais encore aux cercles de courbure d'une enveloppe de sphères assujetties à trois conditions. Cette proposition peut être énoncée comme il suit :

Lorsque les lignes de courbure d'une surface sont des cercles pour une famille, les points où quatre lignes de courbure fixes de l'autre famille coupent un cercle quelconque de la première présentent un rapport anharmonique constant.

On déduit de ce théorème que la connaissance de trois lignes de courbure du second système entraîne celle de toutes les autres.

Ceci posé, la détermination d'une famille de cercles tracés sur une sphère dépendant seulement de *deux* fonctions arbitraires, il paraît impossible, dans le cas général, de choisir ces deux fonctions de manière que trois trajectoires orthogonales de la famille des cercles soient mises en évidence. Il en est ainsi cependant dans certains cas particuliers.

Considérons, par exemple, une famille de cercles orthogonaux à un cercle fixe Ω . Ce dernier coupe orthogonalement en *deux points* chacun des cercles du système, et si l'on prend à volonté une autre trajectoire orthogonale qui, avec le cercle Ω , déterminera la famille entière des cercles, on connaîtra trois trajectoires orthogonales d'où l'on déduira toutes les autres par l'application du théorème de M. A. Ribaucour.

Les observations précédentes montrent que la difficulté reste entière, et qu'on ne peut s'engager dans la voie ouverte par la remarque de M. G. Darboux qu'après avoir intégré les réseaux sphériques orthogonaux formés de cercles pour une famille, de façon que les trajectoires de l'autre famille soient explicitement connues.

C'est pourquoi nous avons pris le parti d'aborder directement le problème proposé et de faire intervenir la considération de l'image sphérique uniquement dans un but de simplification et de coordination.

Malgré cela, nous donnons plus loin (n° 97) la construction intégrale des réseaux sphériques dont il s'agit, et nous établissons, à cet effet, qu'on peut, en choisissant convenablement les deux fonctions déterminantes, mettre en évidence, sans intégration, les courbes de chaque famille. Mais ce résultat se présente comme conséquence, et non comme point de départ de notre théorie.

III

En résumé, nous croyons que, jusqu'à présent, on a plutôt démontré la possibilité d'une solution que présenté cette solution elle-même sous la forme géométrique qu'on est en droit de désirer et, qu'en tout état de choses, on n'a encore indiqué aucun mode de description, à la fois simple

et général, des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système, même dans les cas où les plans de ces lignes enveloppent un cylindre ou un cône.

C'est avec l'espoir de combler cette lacune que j'ai entrepris, après tant d'autres, l'étude de ce chapitre de la théorie des surfaces.

J'ai adopté une marche purement géométrique, en prenant pour guides les principaux résultats mis en lumière par la savante analyse de M. O. Bonnet. Ainsi, pour intégrer l'équation du problème, l'éminent auteur fait usage de la méthode des caractéristiques donnée par Monge, et qui repose, comme on sait, sur la considération des enveloppées développables. M. O. Bonnet ayant prouvé que, dans le problème actuel, ces enveloppées sont les développables circonscrites à la surface cherchée suivant les lignes de seconde courbure, qui sont elles-mêmes les caractéristiques, il est manifeste que ces développables doivent jouer le principal rôle dans notre théorie et qu'on doit les utiliser d'une manière spéciale.

On sait, d'un autre côté, que la connaissance d'une solution particulière rend souvent possible l'intégration d'un problème. Dans l'espèce, cette solution est fournie par les surfaces enveloppes de sphères, car nous démontrons qu'étant donné une surface dont les lignes de courbure d'un système sont planes, il existe une infinité de surfaces enveloppes de sphères ayant la même image sphérique que la première, et dont les cercles de courbure sont respectivement situés dans les mêmes plans que les lignes de courbure de la proposée. (Voir n° 26.)

La méthode que j'ai suivie se résume donc en ces termes : parvenir à la construction intégrale des surfaces à lignes de courbure planes pour un système, en partant de la surface enveloppe de sphères la plus générale et en utilisant les propriétés des développables circonscrites selon les lignes de seconde courbure.

Les considérations précédentes sont exposées dans les chapitres I et II de mon travail. Dans le premier chapitre, après avoir rappelé quelques propriétés, connues pour la plupart, des enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont planes, j'établis deux modes de génération, l'un ponctuel et l'autre tangentiel, des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, et j'indique, en même temps, la construction des développées de ces surfaces. Le chapitre II est consacré à la solution du problème envisagé dans toute sa généralité. Cette solution repose sur

la transformation géométrique, qui permet de passer d'une surface dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'une développable (D), à l'une quelconque des surfaces qui ont la même image sphérique et dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents de (D). Après avoir montré que la construction de la surface la plus générale de l'espèce étudiée comporte quatre fonctions arbitraires et renferme une quadrature habituellement irréductible, j'indique dans quels cas cette quadrature elle-même disparaît. J'étudie ensuite, dans un paragraphe spécial, le cas où les lignes de seconde courbure sont sphériques et dont la génération, analogue à celle des surfaces à lignes de courbure planes pour les deux systèmes, ne donne lieu à aucune intégration.

IV

Indépendamment de la solution dont je viens de parler, qui est directe et que l'on effectue dans l'espace, je présente une seconde solution par laquelle le problème est ramené à une construction plane suivie de la formation d'une développable dont on connaît les rabattements des génératrices sur le plan de la figure. C'est à quoi j'ai été conduit par un théorème que M. A. Ribaucour a donné, pour un cas particulier, dans son mémoire sur les enveloppes de sphères (Nouvelle correspondance mathématique de M. Catalan, 1879-1880) et qu'il a depuis généralisé comme il suit. (Voir n° 69.)

Si des courbes tracées dans les plans tangents d'une développable sont lignes de courbure de la surface qu'elles engendrent :

1° *Elles conservent la même propriété quand on déforme arbitrairement la développable par des rotations autour des génératrices, de façon que chaque plan tangent entraîne la courbe qui s'y trouvait tracée;*

2° *Les lignes de seconde courbure de la surface primitive correspondent point par point aux lignes de seconde courbure de la nouvelle surface.*

L'objet du chapitre III est de donner la démonstration géométrique

de cette belle propriété et de développer, en même temps, quelques-unes de ses conséquences.

Le théorème de M. Ribaucour étant admis, on déroulera, sur un plan, la surface développable dont il est question dans l'énoncé. On étudiera ensuite les propriétés du réseau plan orthogonal qui correspond à la surface proposée, et dont les lignes d'une famille sont identiques aux lignes de première courbure de cette surface. La connaissance des réseaux plans de cette espèce entraînera réciproquement celle des surfaces qu'il s'agit de construire.

Nous démontrons (voir n° 88) que la construction de ces réseaux peut être réalisée, dans le cas général, à l'aide d'opérations n'exigeant aucune intégration.

Cette seconde solution nous fournira de nombreuses propriétés, nouvelles pour la plupart, et qui feront ressortir l'importance du théorème de M. Ribaucour. L'une d'elles est relative à la construction de réseaux orthogonaux; plans ou sphériques dont les lignes d'une famille sont toutes circulaires. (Voir n° 88.)

N. B. — Pour donner à la fois plus d'ensemble et de clarté à mon travail, j'ai indiqué les démonstrations de certaines propriétés connues, en citant autant que possible les noms de leurs auteurs, lorsqu'elles ne se trouvent pas dans les ouvrages classiques; car mon but a été non seulement d'exposer mes propres recherches, mais aussi de présenter une théorie géométrique, qui paraisse suffisamment complète, des surfaces à lignes de courbure planes pour un système.

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DONT TOUTES LES LIGNES DE COURBURE SONT PLANES

§ 1^{er}. — Images sphériques des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

1. Dans la représentation sphérique d'une surface suivant la méthode de Gauss, on fait correspondre un point quelconque M de la surface au point m d'une sphère fixe dont le rayon est parallèle à la normale à la surface au point considéré. Si le point M de la surface décrit sur celle-ci une ligne S , le point correspondant m décrira sur la sphère une ligne s qui sera dite l'*image sphérique* de S . Dans le cas particulier où la ligne S est une ligne de courbure de la surface, cette ligne et son image sphérique ont leurs éléments correspondants parallèles. Réciproquement, si la ligne S a ses éléments parallèles aux éléments correspondants de son image sphérique s , la ligne S est une ligne de courbure de la surface sur laquelle elle est tracée. Il suffit, pour se rendre compte de ces deux propositions importantes, de considérer la normalie de la surface proposée ayant pour directrice S , et le cône ayant pour sommet le centre de la sphère et s'appuyant sur la courbe s . On voit alors que, les génératrices de ces deux surfaces réglées étant parallèles deux à deux et normales respectivement aux éléments de S et s , la condition nécessaire et suffisante pour que les éléments correspondants des courbes S et s soient parallèles, est que la normalie relative à S soit développable comme le cône relatif à s et, par suite, que S soit une ligne de courbure de la surface proposée.

2. On déduit de là les conséquences suivantes, d'ailleurs bien connues.

Image sphérique d'une ligne de courbure plane.

1° Les images sphériques des lignes de courbure d'une surface forment deux familles de courbes orthogonales, comme les lignes de courbure elles-mêmes.

Ce réseau sphérique orthogonal, dont les courbes de chaque famille constituent les images sphériques des lignes de courbure de chacun des systèmes de la surface, est souvent appelé, par abréviation, *image sphérique* de cette surface.

2° Lorsqu'une ligne de courbure est plane, son image sphérique est un cercle dont le plan est parallèle au plan de la ligne de courbure donnée. Réciproquement, si l'image sphérique d'une ligne de courbure est un cercle, la ligne de courbure est contenue toute entière dans un plan parallèle au plan du cercle.

3° Lorsqu'une ligne de courbure est plane son plan coupe, en tous les points de cette courbe, la surface proposée sous un angle constant, et réciproquement.

De ce théorème, dû à Joachimstat, on peut déduire à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui conserve les lignes de courbure, un théorème relatif aux lignes de courbure sphériques et dont voici l'énoncé :

Lorsqu'une ligne de courbure d'une surface est sphérique, la sphère qui la contient coupe la surface sous un angle constant en tous les points de cette ligne.

Ces propositions et leurs réciproques ne sont d'ailleurs que des cas particuliers de la suivante due à Terquem :

Lorsque la ligne d'intersection de deux surfaces est une ligne de courbure commune, les surfaces proposées se coupent sous le même angle en tous les points de cette ligne. Inversement, lorsque deux surfaces se coupent sous un angle constant en tous les points de leur ligne d'intersection, celle-ci sera une ligne de courbure pour l'une des surfaces, si elle l'est pour l'autre. (Voir le *Traité* de M. J. Bertrand.) La théorie des développées conduit d'ailleurs très aisément à tous ces résultats.

Image sphérique caractéristique des surfaces dont toutes les lignes de courbures sont planes.

3. Ces notions étant rappelées, la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courbure d'une surface soient planes, dans les deux systèmes, est que l'image sphérique de cette surface soit formée par un réseau de cercles orthogonaux. Or, lorsque deux cercles tracés sur la sphère se coupent à angles droits, le sommet du cône circonscrit à cette sphère suivant l'un d'eux se trouve dans le plan de l'autre, et réciproquement.

On déduit de ceci la construction générale des réseaux sphériques de cercles orthogonaux, donnée par M. O Bonnet (*Journal de l'École polytechnique*, t. XX, p. 137), et qu'on peut énoncer ainsi :

Tous les réseaux sphériques de cercles orthogonaux s'obtiennent en coupant la sphère par des plans conduits suivant deux droites H et H', assujetties à la seule condition d'être polaires réciproques par rapport à la sphère, ce qui exige que ces droites soient rectangulaires, que leur perpendiculaire commune passe par le centre de la sphère et que le produit des distances du centre de la sphère aux deux droites soit égal au carré du rayon.

On voit par là que les cercles de chaque système ont même axe radical, savoir celle des deux droites H ou H' qui est contenue dans leurs plans. De ces deux droites, l'une est extérieure à la sphère et l'autre la coupe. Dans ce qui suit, nous supposons que H soit la droite extérieure. En vertu de cette hypothèse, les points communs aux cercles du système de la droite H sont imaginaires et, au contraire, les cercles de l'autre système ont deux points réels communs, savoir les points où la droite H' perce la sphère.

4. Désignant par θ l'angle sous lequel le plan d'un cercle du système H coupe la sphère, par α l'angle que forme ce même plan avec un plan parallèle aux deux droites H et H', on aura la formule

$$\cos \theta = \cos \alpha \frac{\delta}{r},$$

dans laquelle r représente le rayon de la sphère et δ la distance du centre de la sphère à la droite H.

Pour les cercles du système (H'), on aurait, de même,

$$\cos \theta' = \cos \alpha' \frac{\delta}{r'},$$

θ' et α' désignant les angles analogues à θ et α , et δ' la distance du centre de la sphère à la droite (H').

On voit ainsi que $\cos \theta$ et $\cos \theta'$ sont respectivement proportionnels à $\cos \alpha$ et $\cos \alpha'$, les coefficients de proportionnalité étant inverses l'un de l'autre, car

$$\frac{\delta}{r} \frac{\delta'}{r'} = 1$$

puisque les deux droites H et H' sont polaires réciproques par rapport à la sphère.

Un cas particulier qui doit être remarqué est celui dans lequel une des droites, H par exemple, touche la sphère. Alors l'autre droite H' touche la sphère au même point A que la première. Les cercles d'une même famille se touchent en ce point puisqu'ils ont pour tangente commune celle des droites H ou H' contenue dans leurs plans. Nous dirons, dans ce cas, que les cercles orthogonaux sont tangents entre eux par famille. Les formules générales se simplifient et l'on a

$$\begin{cases} \theta = \alpha \\ \theta' = \alpha' \end{cases}$$

Revenant aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes, nous énoncerons les proportions suivantes.

Lorsque toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes :

1° *Les plans des lignes de courbure d'un système sont parallèles à une droite fixe et les plans des lignes de courbure de l'autre système sont parallèles à une seconde droite perpendiculaire à la première. Les directions de ces droites sont celles des axes radicaux H et H' des cercles correspondants de l'image sphérique.*

2° *Le plan de chaque ligne de courbure coupe la surface sous un angle dont le cosinus est proportionnel au cosinus de l'angle que fait ce même plan avec un plan fixe parallèle aux deux droites, et les coefficients de proportionnalité sont inverses l'un de l'autre pour les deux systèmes de lignes de courbure.*

On peut énoncer autrement la première partie en disant que les plans des lignes de chacune des courbures enveloppent un cylindre, et que les cylindres enveloppés ont leurs génératrices rectangulaires.

5. Les surfaces dont nous nous occupons forment un cas particulier des surfaces pour lesquelles les lignes de l'une des courbures sont situées dans les plans tangents d'un cylindre. Au sujet de ces dernières, nous démontrerons une proposition dont nous aurons plus tard à faire usage et qui peut s'énoncer comme il suit.

Propriété relative aux surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont dans les plans tangents d'un cylindre.

THÉORÈME. — *Lorsque sur une surface les lignes de courbure d'une famille sont situées dans les plans tangents d'un cylindre, toutes les lignes de courbure de l'autre famille seront planes si l'une d'entre elles est située dans un plan oblique aux génératrices du cylindre.*

Observons d'abord que lorsque des cercles d'une sphère ont même axe radical H , leurs trajectoires orthogonales sont les cercles passant par la droite polaire réciproque de H , de telle sorte que, si une surface a pour image sphérique de ses lignes de première courbure une famille de cercles ayant deux points réels ou imaginaires communs, les lignes de courbure du second système sont planes comme celles du premier.

Ceci posé, considérons une surface répondant aux conditions énoncées. Les lignes de courbure du premier système auront pour images sphériques des cercles dont les plans sont parallèles aux génératrices du cylindre donné, et la ligne de seconde courbure, supposée plane, aura pour image sphérique un cercle C dont le plan est parallèle au plan de cette ligne de courbure. Ce dernier plan étant oblique aux génératrices du cylindre, il en résulte que le cercle C sera un petit cercle de la sphère, sans quoi il ne pourrait couper orthogonalement tous les cercles du premier système, à moins d'avoir son plan perpendiculaire à la direction des génératrices du cylindre considéré. D'autre part, le cercle C étant orthogonal à tous les cercles de la famille donnée, le pôle P de son plan doit appartenir aux plans de chacun de ces cercles, lesquels ont, par conséquent, une droite commune, savoir la parallèle menée par le point P aux génératrices du cylindre. Il en résulte, d'après l'observation que

nous avons faite en commençant, que toutes les lignes de seconde courbure sont planes.

Surfaces-moulures de Monge.

6. Il existe un certain nombre de surfaces à lignes de courbure planes, ayant un mode simple de génération. Nous citerons d'abord les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles, et qui donnent lieu à la proposition suivante bien connue.

THÉORÈME. — *Lorsque les lignes de courbure d'un système sont dans des plans parallèles, les lignes de courbure de l'autre système sont des courbes planes, identiques, dont les plans coupent normalement la surface, et celle-ci est une surface-moulure par rapport à un cylindre quelconque.*

Si l'on suppose, en effet, que les lignes de courbure d'un système soient situées dans des plans parallèles, les cercles correspondants de l'image sphérique seront pareillement situés dans des plans parallèles aux premiers, de telle sorte que leurs trajectoires orthogonales, images sphériques des lignes de courbure du second système, se confondront avec les grands cercles passant par le diamètre perpendiculaire à la direction commune des plans donnés. Les lignes de seconde courbure seront donc planes, et leurs plans couperont normalement la surface, de même que les plans des grands cercles de l'image sphérique coupent normalement la sphère. Ces lignes étant situées dans les plans tangents d'un cylindre, et leurs plans rencontrant la surface orthogonalement, on sait, d'après un théorème de Monge, que cette surface est le lien des positions successives d'un profil constant lié à un plan qui s'enroule sur un cylindre de forme arbitraire.

Les surfaces de révolution sont des cas particuliers de ces surfaces-moulures.

On les obtient en supposant que le cylindre directeur se réduise à une ligne droite.

Surfaces développables à lignes de courbure planes.

7. La considération de l'image sphérique permet encore de définir géométriquement les *surfaces développables* dont les lignes de courbure, autres que les génératrices, sont planes. Remarquons, à cet effet, que

toutes les lignes de courbure d'une développable ont la même image sphérique, en sorte que si l'une d'elles est plane, il en est de même de toutes les autres. Ceci posé, si les lignes de courbure d'une développable sont planes, l'image sphérique commune à toutes ces lignes se réduit à un cercle, et, par suite, la développable circonscrite à la sphère et dont les plans tangents sont parallèles à ceux de la développable est un cône droit. Or, cela exige que les génératrices de la développable donnée, parallèles aux génératrices du cône, fassent, comme ces dernières, un angle constant avec l'axe de ce cône. Il en résulte que l'arête de rebroussement de la développable est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cet axe, et que la surface est un hélicoïde développable. La réciproque étant vraie, on en conclut que les *développables dont les lignes de courbure sont planes, sont les hélicoïdes développables*.

Si l'on observe que la développable circonscrite à une surface suivant une ligne de courbure S admet cette ligne S pour ligne de courbure, on parviendra à cette conclusion bien connue :

Lorsqu'une surface possède une ligne de courbure plane S , la développable circonscrite à cette surface suivant S est un hélicoïde dont l'arête de rebroussement est une hélice relative à un cylindre normal au plan de S . La réciproque est vraie.

§ 2. — Des surfaces enveloppes de sphères dont toutes les lignes de courbure sont planes.

Génération des enveloppes de sphères dont toutes les lignes de courbure sont planes.

8. Les seules enveloppes de sphères que nous aurons à considérer dans le présent travail sont les enveloppes de sphères assujetties à trois conditions, c'est-à-dire dont l'équation générale contient un seul paramètre arbitraire. Les lignes de première courbure des surfaces de cette espèce sont les caractéristiques, ou bien encore les cercles de contact de chacune des sphères avec l'enveloppe. Le cercle de courbure relatif à une sphère donnée résulte par suite de son intersection avec le plan radical de cette sphère et de la sphère infiniment voisine. Réciproquement, lorsque les

lignes de l'une des courbures sont circulaires, la surface est une enveloppe de sphères.

Nous nous proposons de définir géométriquement celles de ces surfaces dont les lignes de seconde courbure sont planes.

Supposons qu'une surface enveloppe de sphères admette une ligne de seconde courbure située dans un plan P . D'après le théorème de Joachimstal, ce plan doit couper la surface sous un angle constant θ en tous les points de cette ligne, et, par suite, il coupera sous le même angle θ toutes les sphères enveloppées; ce qui exige que les centres de similitude directe ou inverse de deux sphères quelconques soient situés sur le plan P , ou bien encore que leurs rayons soient proportionnels à leurs distances au plan P .

Supposons maintenant qu'une surface enveloppe de sphères admette deux lignes de seconde courbure situées dans deux plans P et P' se coupant suivant la droite L . D'après ce qui précède, cette droite L doit contenir les centres de similitude de deux sphères enveloppées quelconques, d'où il résulte que les centres de toutes ces sphères sont contenus dans un plan Q passant par L et que leurs rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres à L .

Si par la droite L on mène un autre plan quelconque P'' , ce plan passant par les centres de similitude des sphères prises deux à deux les coupera toutes sous un même angle θ'' , et, par suite, il coupera aussi, sous l'angle constant θ'' , la surface proposée en tous les points de son intersection qui sera, dès lors, une ligne de courbure de la surface. Ainsi, lorsqu'une surface enveloppe de sphères possède deux lignes de seconde courbure planes, toutes les lignes de seconde courbure sont planes et leurs plans passent par une même droite L . De plus, les centres des sphères enveloppées sont contenus dans un plan passant aussi par L , et leurs rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres à la droite L .

Réciproquement, considérons la surface enveloppe d'une série de sphères ayant leurs centres sur une courbe de forme quelconque tracée dans un plan Q , et dont les rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres à une droite L de ce plan Q . Cette droite L contiendra, par conséquent, les centres de similitude des sphères enveloppées prises deux à deux. Tout plan passant par L coupera donc sous le même angle toutes

ces sphères et rencontrera, par suite, la surface sous ce même angle en tous les points de son intersection avec elle, de telle sorte que cette intersection sera une ligne de courbure. Il résulte de là que toutes les lignes de seconde courbure sont situées dans les différents plans conduits suivant L.

On peut résumer ces conclusions de la manière suivante :

THÉORÈME. — 1° *Lorsqu'une surface enveloppe de sphères possède deux lignes de seconde courbure planes, toutes les lignes de seconde courbure sont planes, et leurs plans passent par une même droite;* 2° *Toute surface enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont planes est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une ligne plane donnée, de forme arbitraire, et dont le rayon est proportionnel à la distance de son centre à une droite fixe L située dans le plan des centres. — Les lignes de seconde courbure sont les sections de la surface par les plans contenant cette droite L¹.*

9. Soit m le rapport constant qui existe entre le rayon d'une sphère et la distance de son centre à L. Désignons par θ et θ' les angles sous lesquels la surface est rencontrée par le plan d'un cercle de courbure ou d'une ligne de seconde courbure. Soit de même α et α' les angles respectifs de ces mêmes plans avec le plan R perpendiculaire au plan des centres conduits par la droite L. On aura la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = m \cos \alpha \\ \cos \theta' = \frac{1}{m} \cos \alpha' \end{array} \right. .$$

La seconde formule s'obtient immédiatement. Quant à la première, elle résulte, d'une part, de ce que le plan R est parallèle aux génératrices des cylindres enveloppés par les plans des lignes de courbure des deux systèmes, et, d'autre part, de ce que, d'après le théorème du numéro 2, $\cos \theta$ et $\cos \theta'$ doivent être respectivement proportionnels à $\cos \alpha$ et $\cos \alpha'$, les coefficients de proportionnalité étant inverses l'un de l'autre.

1. Voir la *Théorie nouvelle des lignes à double courbure*, par M. Paul Serret, page 263.

Cas particuliers des surfaces-canaux.

10. Dans les raisonnements précédents, nous avons supposé que les plans de deux lignes de seconde courbure se rencontrent suivant une droite L située à distance finie. Considérons le cas où les plans P et P' sont parallèles. On a, par suite, une série de sphères qui sont coupées sous des angles constants par deux plans parallèles P et P', ce qui exige évidemment que toutes ces sphères aient le même rayon et que leurs centres décrivent une courbe située dans un plan Q parallèle aux plans P et P'. Tout autre plan parallèle à P" coupera la sphère et la surface enveloppe sous un angle constant, et son intersection avec cette surface sera, par suite, une ligne de courbure.

Réciproquement, l'enveloppe d'une série de sphères de même rayon et dont les centres parcourent une courbe plane est telle que les lignes de seconde courbure sont situées dans des plans parallèles au plan des centres.

Donc, lorsqu'une surface enveloppe de sphères possède deux lignes de seconde courbure situées dans deux plans parallèles, toutes les lignes de seconde courbure sont contenues dans des plans parallèles aux premiers. Toute surface de cette sorte est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant, dont le centre décrit une courbe plane de forme arbitraire. Les lignes de seconde courbure sont situées dans les plans parallèles au plan des centres. Les cercles de courbure sont les grands cercles des sphères enveloppées situées dans les plans normaux de la courbe des centres, et ces plans coupent normalement la surface enveloppe.

Cette dernière conclusion repose sur ce que le cercle d'intersection de deux sphères égales et infiniment voisines est situé dans le plan mené par le centre de l'une d'elles, perpendiculairement à l'élément qui réunit les centres.

On voit par là que les surfaces dont nous parlons sont des surfaces-canaux particulières. Elles correspondent au cas où la ligne des centres des sphères est plane.

On peut aussi regarder ces surfaces comme des surfaces moulures, puisque les cercles de courbure sont dans des plans normaux à la surface.

Seulement, dans le cas considéré, le profil de la moulure est circulaire.

Surfaces enveloppes de sphères considérées comme cas particulier des surfaces de Joachimstal.

11. Les surfaces enveloppes de sphères dont toutes les lignes de courbure sont planes, constituent un cas particulier des surfaces de *Joachimstal*. Nous désignons sous ce nom des surfaces étudiées par Joachimstal (t. XXX du *Journal de Crelle*), et qui sont définies par cette condition que les lignes de courbure d'un système sont situées dans des plans passant par une droite fixe. Lorsque la droite fixe disparaît à l'infini, on obtient les surfaces moulures de *Monge*. Au sujet des surfaces de Joachimstal, on peut énoncer la proposition suivante :

Lorsque les lignes S de l'une des courbures sont situées dans des plans passant par une droite fixe L : 1° les lignes T de l'autre courbure sont sphériques ; 2° les sphères qui les contiennent ont leurs centres sur la droite L et coupent la surface orthogonalement.

Voici une démonstration très simple de cette propriété bien connue.

Concevons la développable circonscrite à la surface le long d'une ligne T de seconde courbure. Les génératrices de cette développable sont les tangentes aux lignes S de première courbure, dans les points où elles sont rencontrées par T. Deux génératrices consécutives de cette développable sont tangentes à deux lignes S infiniment voisines, et, puisqu'elles doivent se rencontrer, leur point de concours sera situé sur la droite L, qui appartient aux plans de ces deux lignes. Il résulte de là que la développable considérée est un cône dont le sommet C est sur la droite T, car s'il n'en était pas ainsi, l'arête de rebroussement de la développable, qui est le lieu des intersections successives de ses génératrices, serait une droite L, ce qui est impossible.

Ceci posé, la courbe T coupant normalement les génératrices du cône appartient à une sphère ayant pour centre le sommet C de ce cône, et coupant normalement le cône ainsi que la surface proposée à laquelle ce cône est circonscrit suivant la ligne T. Toutes les parties de la proposition sont donc démontrées.

On déduit de là une autre proposition qui nous sera bientôt utile et qui peut être regardée comme la réciproque d'une propriété établie au numéro 8.

Lorsque toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes, les lignes de l'une des courbures seront circulaires, si les plans des lignes de l'autre courbure passent par une même droite.

Car, s'il en est ainsi, les lignes de première courbure sont d'abord sphériques, et, comme elles sont planes, par hypothèse elles sont circulaires.

Construction des cercles de courbure.

12. Revenons maintenant à la construction générale du n° 8 pour déterminer géométriquement les éléments principaux de la surface enveloppe, soit (A) la courbe des centres. De chaque point A de cette courbe comme centre, nous décrivons une sphère dont le rayon r est lié à la distance AP du point A à une droite fixe L du plan, par la relation

$$r = m AP,$$

où m désigne un membre constant.

Cherchons, en premier lieu, le cercle de contact de chaque sphère avec son enveloppe. Nous observons, à cet effet, que la développable circonscrite à la surface le long d'un cercle de courbure est un cône qui est en même temps circonscrit à la sphère enveloppée correspondante et à la sphère enveloppée infiniment voisine. Son sommet c est donc le centre de similitude des deux sphères. Ce point doit se trouver d'abord sur la ligne des centres, qui est la tangente à la courbe (A), et, en second lieu, sur la droite L qui contient le centre de similitude de deux sphères quelconques du système. Donc, *le cercle de contact d'une sphère enveloppée quelconque est situé dans le plan polaire, par rapport à cette sphère, du point de rencontre de la droite L et de la tangente à la courbe (A) au centre A de la sphère.*

On obtient ainsi géométriquement les caractéristiques de la surface, c'est-à-dire les lignes circulaires de première courbure. Les lignes de courbure de l'autre système résultent des intersections de la surface et des plans conduits par la droite L. Nous aurons bientôt l'occasion d'y revenir. La construction précédente montre que les développables circonscrites à la surface le long des cercles de courbure, sont des cônes de révolution ayant leurs sommets c sur la droite L et sur les tangentes de la courbe (A). Les sommets de ces cônes sont les centres de sphères

passant par les cercles de courbure correspondants et coupant orthogonalement la surface.

Ces sphères orthogonales ne sont autres que les sphères contenant les lignes de seconde courbure de la surface, considérée comme surface de *Joachimstal*.

La normale et le plan tangent seront connus en chaque point de la surface, car, en tout point d'un cercle de courbure, la normale passe par le centre de la sphère enveloppée qui contient ce cercle.

Géodésiques principales.

13. Parmi les lignes de courbure, il importe de distinguer celles qui sont en même temps géodésiques et que l'on appelle *géodésiques principales*. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne de courbure soit aussi ligne géodésique est qu'elle soit plane et que son plan coupe la surface orthogonalement en tous les points de cette ligne. Dans le problème actuel, les géodésiques principales de chaque système seront, par suite, celles qui correspondent aux valeurs nulles de $\cos \theta$ ou $\cos \theta'$, ou bien encore aux valeurs nulles de $\cos \alpha$ ou $\cos \alpha'$. (Voir n° 9.)

En premier lieu, les cercles de courbure qui sont des géodésiques correspondent au cas où l'angle α est droit, c'est-à-dire au cas où le plan du cercle de courbure est perpendiculaire à la droite L, ce qui exige que la tangente à la courbe (A) soit parallèle à L. Ainsi, les cercles de courbure qui sont des géodésiques principales sont les cercles de contact des sphères ayant pour centres les points de la courbe (A) où la tangente est parallèle à L. De plus, ces cercles sont des grands cercles des sphères correspondantes, comme on le voit encore en remarquant que les pôles c de leurs plans s'éloignent à l'infini.

Quant aux géodésiques principales de l'autre système, pour lesquelles on doit avoir $\alpha' = 0$, elles sont situées dans le plan de la courbe (A). Donc la géodésique principale du second système est la section de la surface par le plan contenant les centres. Cette géodésique est l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt la courbe (A), et dont le rayon et la distance du centre à la droite L sont liés par la relation déjà donnée

$$r = m \text{ AP.}$$

D'après la construction que nous avons donnée, les points où l'un

quelconque des cercles enveloppés touche son enveloppe sont les points B et B' d'intersection de ce cercle avec la polaire, par rapport à ce cercle, du point de rencontre de la droite L et de la tangente à (A) au centre A du cercle. La géodésique principale considérée est donc formée de deux branches (B) et (B') relatives à chacun des points de contact.

Il importe de remarquer que les cordes de contact telles que BB' sont les traces de plans de cercles de courbure, lesquels sont perpendiculaires au plan des centres. Par suite, l'enveloppe (E) des droites BB' est la section droite du cylindre tangent aux plans des cercles de courbure.

Construction des lignes de seconde courbure

14. La géodésique principale du second système étant construite, il sera très aisé d'obtenir une ligne de courbure quelconque de ce système. A cet effet nous rabattons les plans de ces lignes sur le plan des centres en les faisant tourner autour de leur droite commune L. *Nous démontrerons d'abord que les rabattements des lignes de courbure du second système sont les trajectoires orthogonales des grands cercles que le plan de la figure détermine dans les sphères orthogonales de la surface dont les centres sont sur L.*

Concevons, en effet, la ligne de seconde courbure T située dans un plan P passant par L et soit M l'un des points où elle rencontre un cercle de courbure, par exemple celui dont la trace est BB'. La tangente en M à la ligne T est la génératrice du cône circonscrit à la surface suivant ce cercle. Cette tangente aboutit dès lors au sommet de ce cône c'est-à-dire au centre C de la sphère orthogonale contenant le cercle de courbure considéré. Si nous rabattons le plan autour de L, le point M reviendra en M₁ sur le grand cercle de la sphère orthogonale situé dans le plan de la figure et la tangente MC sera devenue M₁ C, ce qui prouve bien que le rabattement de la courbe T coupe orthogonalement ce grand cercle en M₁.

Pour trouver ce point M₁ remarquons que la projection *m* de M est sur BB' et que le rapport des distances de *m* et M₁ à L est constant et égal au cosinus de l'angle que forme le plan P avec le plan de la figure, c'est-à-dire à $\sin \alpha'$. Donc, le point M₁ sera aussi situé sur la droite que

l'on déduit de BB' en agrandissant les distances de ses points à L dans le rapport de 1 à $\sin \alpha'$.

Pour construire le rabattement de la ligne de courbure dont le plan passant par L correspond à l'angle α' , on prendra un cercle de courbure quelconque, sa trace BB' et la trace de la sphère orthogonale correspondante. On coupera ce grand cercle par la droite déduite de BB' en agrandissant les distances de ses points à L dans le rapport constant de 1 à $\sin \alpha'$ et les points d'intersection M_1 et M'_1 appartiendront au rabattement demandé. De plus, les tangentes, en ces points, seront les rayons M_1C et M'_1C .

Nous ferons observer que la construction précédente donne une solution géométrique de ce problème : Connaissant une trajectoire orthogonale d'une famille de cercles ayant leurs centres sur une droite L , construire une autre trajectoire orthogonale quelconque.

Centres de courbure principaux.

15. Proposons-nous maintenant de déterminer les centres et les rayons de courbure principaux ainsi que la développée de la surface.

Le centre de première courbure, c'est-à-dire le point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins pris sur un cercle de courbure, est évidemment le centre de la sphère enveloppée correspondante, et le rayon de première courbure est le rayon de cette sphère. Ce centre et ce rayon sont les mêmes tout le long d'un cercle de courbure et la nappe correspondante de la développée se réduit à la courbe des centres (A).

Pour trouver le centre de seconde courbure, c'est-à-dire le point de rencontre N des normales en deux points infiniment voisins M et M' pris sur une ligne de seconde courbure, nous remarquerons que les normales NM et NM' sont égales et que, de plus, elles sont tangentes aux sphères orthogonales C et C' contenant les points M et M' . Le point N appartient donc au plan radical de ces deux sphères infiniment voisines. Mais, d'un autre côté, ce plan radical passe évidemment par la ligne d'intersection des plans des cercles de courbure relatifs aux points M et M' , c'est-à-dire par la droite suivant laquelle le plan du premier cercle touche son enveloppe, de telle sorte que ce plan radical qui doit être perpendiculaire à la ligne des centres L est complètement déterminé. *Donc, le centre de*

seconde courbure en un point quelconque M est situé sur le plan perpendiculaire à L, mené par la droite suivant laquelle le plan du cercle de courbure contenant le point M touche le cylindre enveloppe.

Si le point M se meut sur un cercle de courbure, ce dernier plan ne change pas. En outre, la normale en M qui contient le centre de seconde courbure décrit un cône de révolution ayant pour sommet le centre A de la sphère enveloppée. Ainsi :

Le long d'un cercle de courbure les centres de seconde courbure décrivent une conique qui résulte de l'intersection du cône droit formé par les normales à la surface en tous les points de ce cercle, et du plan mené perpendiculairement à L par la droite de contact du plan du cercle avec le cylindre enveloppe.

Cette propriété, trouvée par M. O. Bonnet, suffit pour définir géométriquement la nappe de la développée qui reçoit les centres de seconde courbure. Il est digne de remarque que les plans perpendiculaires à L coupent cette développée suivant des coniques. On démontrerait, sans difficulté, que toutes ces coniques sont homothétiques et d'excentricité $\frac{1}{m}$. Comme nous devons rencontrer bientôt des résultats plus étendus, il n'y a pas lieu actuellement de pousser plus loin la discussion de ces courbes.

16. Nous remarquons que les théorèmes précédents ne donnent pas encore une construction géométrique des centres de seconde courbure, car il reste à faire voir comment on peut déduire, de la courbe initiale (A), soit le plan radical de deux sphères orthogonales infiniment voisines, soit la droite suivant laquelle le plan d'un cercle de courbure touche son enveloppe.

Pour y parvenir, considérons ce qui a lieu dans le plan de la figure. Soient F et F' les centres de courbure des géodésiques principales (B) et (B') aux points B et B' qui correspondent au point A de (A). Soit E le point où la corde des contacts BB' touche son enveloppe (E). Ce point E est la trace de la génératrice suivant laquelle le cercle de courbure projeté sur BB' touche le cylindre enveloppe. D'après le théorème que nous venons de démontrer, les trois points F, F', E sont situés sur une même perpendiculaire à L, de telle sorte que la connaissance de l'un de ces points suffit pour avoir les deux autres, puisqu'on sait d'avance qu'ils

sont situés respectivement sur les normales BA, B'A aux courbes (B), (B') et sur la corde BB'.

L'ensemble des courbes (B), (B'), peut être considéré comme une transformée de (A), la transformation étant définie par la construction géométrique que nous avons donnée. Il est clair que si l'on appliquait ce mode de transformation à deux courbes (A) qui fussent tangentes, osculatrices, leurs deux transformées seraient pareillement tangentes ou osculatrices.

Si donc l'on connaissait une courbe (α) qui fût osculatrice à (A) et telle que sa transformée (β) fût un cercle, on aurait dans (β) le cercle osculateur de (B) et le centre de ce cercle donnerait le centre de courbure demandé.

17. Nous sommes ainsi conduit à résoudre la question suivante :

Quelle doit être la courbe (A) pour que l'enveloppe des cercles ayant pour centres les points de cette courbe et dont les rayons soient proportionnels à leurs distances à la droite L, devienne une circonférence de cercle? Ceci revient, étant donné un cercle de centre F et une droite L, à trouver le lieu (A) des points tels que leur distance AB au cercle et leur distance à la droite L soient liés par l'équation

$$AB = m. AP.$$

Or ce lieu est une conique ayant pour foyer le centre F du cercle, dont l'excentricité est égale au rapport constant m , et dont la directrice correspondante à F est parallèle à L et située à une distance de cette droite égale à $\frac{R}{m}$, R désignant le rayon du cercle donné.

Si nous revenons maintenant au problème proposé, nous voyons que le centre de courbure F de la courbe (B) en B est l'un des foyers de la conique osculatrice en A à la courbe (A), dont l'excentricité est égale au rapport m et dont l'axe focal est perpendiculaire à L. Cette conique est complètement déterminée par les cinq conditions que nous venons d'énoncer et il en résulte que le centre de courbure de la seconde branche (B') en B' est le second foyer de la même conique. On a donc l'énoncé suivant :

La droite sur laquelle se trouvent situés les points F, F' et E, est l'axe focal d'une conique assujettie à être osculatrice à la courbe (A) en A, à avoir sa directrice parallèle à L et son excentricité égale à m .

On construira immédiatement les foyers F et F' de cette conique qui sont situés sur deux droites connues d'avance AB et AB' . Il suffit pour cela d'effectuer les opérations inverses de celles qu'on fait pour construire le centre de courbure d'une conique dont on connaît les foyers.

Soit donc G le centre de courbure de (A) au point A . Le point G sera le centre de courbure de la conique osculatrice. On projettera le point G en I sur l'un des rayons vecteurs AB ou AB' et l'on projettera les points I en K sur AG . L'axe focal sera la perpendiculaire menée par le point K à L et cette droite coupera AB , AB' et BB' aux points demandés F , F' et E .

Définition géométrique de la développée.

18. Mais ce n'est pas tout, car les considérations précédentes vont nous conduire à une définition géométrique très simple de la développée.

Prenons, en effet, le cercle de courbure projeté en BB' . Les centres de seconde courbure pris le long de ce cercle décrivent une conique dont le plan a pour trace la droite FF' , et qui est située sur le cône droit, ayant pour sommet le point A et le cercle BB' pour base. Les points F , F' appartiennent à cette conique, et sont les sommets de son axe focal. On sait que cette conique admet pour focale une autre conique ayant pour foyers les points F et F' , et passant par le sommet A du cône. Or, il existe deux coniques satisfaisant à ces conditions, savoir : la conique osculatrice en A à (A) , et qui a pour foyers les points F et F' , d'après ce que nous avons vu, et une autre conique d'un genre différent. D'un autre côté, il est visible que la conique lieu des centres de seconde courbure et la conique osculatrice sont des genres différents. Par suite, cette dernière conique est la focale de la conique cherchée. Donc,

La conique lieu des centres de seconde courbure, en tous les points d'un cercle de courbure, est la focale de la conique osculatrice à (A) au point A de cette courbe correspondant au cercle de courbure donné, dont l'axe focal est perpendiculaire à L , et dont l'excentricité est m .

De là résulte aussi le mode de génération suivant pour la nappe de la développée qui contient les centres de seconde courbure.

La seconde nappe de la développée est le lieu des coniques focales des coniques osculatrices à (A) , dont l'axe focal est perpendiculaire à L , et dont l'excentricité est m .

Toutes ces coniques focales sont homothétiques entre elles, comme les coniques elles-mêmes, et leur excentricité est $\frac{1}{m}$.

Cette dernière conclusion repose sur ce que les excentricités de deux coniques focales sont inverses l'une de l'autre.

Nous désignerons les coniques osculatrices et leurs focales sous le nom de *coniques caractéristiques* de la surface.

Si le rapport m est inférieur à l'unité, les coniques osculatrices sont des ellipses, et les coniques focales de la développée sont, par suite, des hyperboles. Au contraire, si m est supérieur à l'unité, les premières coniques caractéristiques sont des hyperboles, et les autres des ellipses.

Enfin, si $m = 1$, les coniques caractéristiques des deux systèmes sont des paraboles. Dans ce cas, les cercles ayant pour centres les points de (A) sont tangents à la droite L, qui forme l'une des branches de la géodésique principale (B, B'), ce qui montre bien que l'un des centres de courbure F ou F' disparaît à l'infini.

Enveloppes de sphères ayant une image sphérique donnée.

19. Reprenons la théorie générale des surfaces enveloppes de sphères, afin de résoudre le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces enveloppes de sphères ayant pour image sphérique de leurs lignes de courbure un réseau donné de cercles orthogonaux.

PREMIÈRE SOLUTION. — Une première solution de ce problème est intuitive; nous nous bornerons, en conséquence, à donner son énoncé, qui est le suivant :

Soient H et H' les deux droites par lesquelles passent les plans des cercles de l'image sphérique appartenant à chacun des deux systèmes.

Il existe deux séries de surfaces enveloppes de sphères ayant pour image sphérique le réseau donné, savoir : celles dont les cercles de courbure sont dans des plans parallèles à H, et celles dont les cercles de courbure ont leurs plans parallèles à H'.

Toute surface de la première série est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une courbe (A) de forme arbitraire, située dans un plan Q perpendiculaire à H, dont le rayon et la distance de son centre à une

droite L parallèle à H', et située dans le plan Q, présentent un rapport constant

$$m = \frac{\delta}{r},$$

où r est le rayon de la sphère, et δ la distance de son centre à H.

Pareillement, toute surface de la seconde série est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une courbe (A') de forme arbitraire située dans un plan Q' perpendiculaire à H', et dont le rayon et la distance de son centre à une droite parallèle à H, et située dans le plan Q', présentent un rapport constant

$$m' = \frac{\delta'}{r},$$

où δ' désigne la distance du centre de la sphère à H'.

Les coniques caractéristiques ont pour excentricités respectives les deux rapports $\frac{\delta}{r}$ et $\frac{\delta'}{r}$, inverses l'un de l'autre.

Dans le cas où les cercles orthogonaux sont tangents entre eux par famille, les deux rapports m et m' sont égaux à l'unité, et les coniques caractéristiques sont des paraboles.

Les deux séries de surfaces répondant à la question sont caractérisées par une *fonction arbitraire* correspondant à la courbe des centres, qui peut être quelconque.

SECONDE SOLUTION. — 20. On peut donner du même problème une autre solution, qui nous sera non moins utile que la première.

Conservons les notations précédentes. Soit (M) une surface enveloppe de sphères ayant pour image sphérique le réseau donné, et telle, par exemple, que les plans des lignes de courbure circulaires soient parallèles à H, auquel cas les plans des lignes de seconde courbure passent par une droite fixe L parallèle à H'. Transportons la surface (M) parallèlement à elle-même, de façon que L coïncide avec H', et considérons les cônes droits circonscrits, d'une part, à la sphère suivant les cercles du système H, et, d'autre part, à la surface suivant les cercles de courbure, qui sont respectivement parallèles aux précédents. Les sommets de ces deux séries de cônes sont tous situés sur H', et, de plus, le cône circonscrit à la surface, le long d'un cercle de courbure, et le cône circonscrit à la

sphère suivant le cercle image du premier sont parallèles entre eux. On passe du second au premier par un transport parallèle dans le sens de H' . La grandeur de la translation varie en passant d'un cercle de la sphère à un autre, suivant une loi qui dépend de la forme de la surface (M) .

Réciproquement, supposons que l'on transporte parallèlement dans le sens de H' les cônes droits circonscrits à la sphère suivant les cercles du système H , de façon que la translation varie, suivant une loi continue quelconque, quand on passe d'un cône au cône infiniment voisin. Je dis que la surface (M) enveloppe des cônes dans leurs nouvelles positions sera une surface enveloppe de sphères ayant pour image sphérique le réseau donné. Prenons, en effet, deux cônes infiniment voisins c et c' circonscrits à la sphère, et observons que les cônes infiniment voisins C et C' , qui leur correspondent pour (M) , forment un système homothétique à celui des deux premiers, de telle sorte que la courbe de contact du cône C avec (M) sera un cercle S situé dans un plan parallèle au cercle de contact s du cône c avec la sphère. Les cercles S , étant les cercles de contact de la surface et des cônes de révolution circonscrits, sont les lignes de première courbure de (M) , ce qui montre d'abord que (M) est une surface enveloppe de sphère.

De plus, les cercles de courbure S de (M) ont pour images sphériques les cercles s de la sphère, dont les plans passent par H , et, dès lors, d'après un théorème connu, les lignes de seconde courbure de (M) auront pour images sphériques les cercles de la sphère passant par la droite H' , polaire réciproque de H . La proposition est donc démontrée, et l'on peut énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les surfaces enveloppes de sphères ayant pour image sphérique un réseau donné, formé de cercles orthogonaux, sont aussi les enveloppes de cônes obtenus en transportant, suivant une loi continue quelconque et parallèlement à la droite qui réunit leurs sommets, les cônes droits circonscrits à la sphère suivant les cercles de l'un ou de l'autre système. Les cercles de courbure sont parallèles aux cercles du système choisi, et les lignes de seconde courbure passent par la droite qui reçoit les sommets des cônes enveloppés.*

Il y a deux séries de surfaces correspondant aux cercles de chaque système, et, dans les deux cas, la fonction arbitraire qui régit le problème est représentée par une longueur comptée sur une droite fixe.

Étude de la cyclide de Dupin.

21. On désigne sous ce nom toute surface dont les lignes de courbure sont circulaires pour les deux systèmes. Dupin a démontré que ces surfaces sont identiques aux surfaces enveloppes des sphères tangentes à trois sphères fixes. Plus récemment, M. Mannheim a donné une démonstration très élégante de cette propriété (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1860, p. 67 et suiv.), et a fait voir que les cyclides ne sont autres que les surfaces que l'on déduit du *tore* au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Le tore est évidemment la cyclide de révolution.

Nous nous proposons d'appliquer à l'étude de cette surface les considérations générales que nous venons d'exposer, ce qui nous permettra de retrouver géométriquement les résultats déjà obtenus par M. Lemonnier (Thèse, p. 33 et suiv.), ainsi que le cas, signalé par M. Darboux, dans lequel la cyclide devient une surface de troisième degré.

Puisque les lignes de courbure de la cyclide sont circulaires dans les deux systèmes, il en résulte que les plans des cercles de courbure des deux systèmes passent respectivement par deux droites fixes perpendiculaires entre elles. La réciproque est vraie. Ainsi, la cyclide est caractérisée par cette circonstance, que les cylindres enveloppes des plans des lignes de courbure se réduisent à deux droites rectangulaires.

Ceci posé, considérons une cyclide, soit (A) la courbe, lieu des centres des sphères enveloppées d'un système, et L la droite du plan des centres par laquelle passent les plans des lignes de courbure du second système. Ces dernières sont aussi des cercles, et il en sera de même de la géodésique principale du plan des centres. Dès lors, d'après un théorème que nous avons énoncé (n° 17), la courbe (A) est une conique dont l'axe focal est perpendiculaire à L, et dont l'excentricité est égale au rapport constant m qui doit exister entre les rayons des sphères enveloppées et les distances de leurs centres à L.

Concevons réciproquement la surface enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une conique (A) et dont le rayon est égal au produit de l'excentricité de la conique par la distance de son centre à une droite L

de son plan perpendiculaire à l'axe focal de cette conique. Je dis que cette surface est une cyclide, et, pour cela, il suffit de démontrer que les plans des cercles de courbure passent aussi par une droite fixe. Or, d'après une propriété connue des courbes du second degré, les cercles, traces des sphères enveloppées, ont un centre radical commun E situé sur l'axe focal de (A). Donc, toutes les sphères auront pour axe radical commun la perpendiculaire L' au plan de (A) élevée par le point E, et c'est par cette droite que passeront les plans des cercles de courbure du premier système. La surface est donc une cyclide. L'une des nappes de la développée est la conique (A) qui reçoit les centres des sphères du premier système. L'autre nappe se réduit aussi à une courbe (A') qui est la focale de (A) et qui contient les centres des sphères du second système, c'est-à-dire des sphères qui touchent la surface suivant les cercles dont les plans passent par L. Cette conclusion résulte de la définition générale de la développée donnée au n° 18¹. Cette courbe (A') peut donc servir à décrire la même surface, en remplaçant la droite L par la droite L' dont le pied est en E, et en changeant le rapport primitif m en $\frac{1}{m}$. On peut résumer ces propriétés comme il suit :

1° Une cyclide quelconque est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une conique donnée (A) et dont le rayon est égal au produit de l'excentricité de la conique par la distance du centre de la sphère à une perpendiculaire L élevée sur l'axe focal de la conique ;

2° Les sphères enveloppées ont pour axe radical commun une perpendiculaire L' au plan de (A), dont le pied est sur l'axe focal de (A) ;

3° On peut engendrer la cyclide précédente d'une autre manière en prenant l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt la conique (A') focale de (A), et dont le rayon est égal au produit de l'excentricité de (A'), inverse de celle de (A), par la distance de son centre à la droite L' précédemment définie.

Les coniques (A) et (A') sont les coniques caractéristiques de la surface. Considérons d'abord le cas général où ces coniques sont à centre. L'une d'elles est une ellipse, et l'autre une hyperbole. Alors les droites L et L' donnent lieu à la relation

1. C. Dupin a démontré très simplement ces propriétés dans ses *Applications de géométrie*.

$$\frac{OH}{OE} = m^2 ,$$

O étant le centre commun de (A) et de (A').

Si l'équation de l'ellipse dans son plan est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) ,$$

et si q désigne la distance du centre O à la droite L; on trouve, pour l'équation de la surface

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{c^2 q^2}{a^2} \right)^2 = 4 \left[a^2 \left(x - \frac{c^2 q}{a^2} \right)^2 + b^2 y^2 \right] ,$$

où l'on a posé :

$$c^2 = a^2 - b^2 ;$$

de telle sorte que la cyclide est une surface du *quatrième degré*, dans le cas général où les coniques caractéristiques sont des courbes à centre. Supposons maintenant que la conique (A) soit une parabole. Alors (A') sera la parabole focale de la première. Dans ce cas, les *droites L et L' sont telles que leur plus courte distance HE est égale au paramètre commun des paraboles (A) et (A')*. Cette propriété est très aisée à vérifier.

Ceci posé si l'équation de la parabole (A) est

$$y^2 = 2px ,$$

et si q désigne la distance de L au sommet de cette courbe, on trouve, pour l'équation de la surface :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - q^2)(x - q) - p(x^2 + z^2 - q^2) = 0 .$$

On voit par là que, dans le cas particulier où les coniques caractéristiques sont des paraboles, la cyclide n'est plus que du *troisième degré*.

Actuellement, nous observons que si l'on fait l'image sphérique de la cyclide, les rapports $\frac{\delta}{r}$ et $\frac{\delta'}{r'}$ sont respectivement égaux aux excentricités des coniques caractéristiques. Dès lors la cyclide du troisième degré correspond au cas où le réseau sphérique, image de la surface, est constitué par des cercles orthogonaux tangents entre eux par famille.

22. On peut aussi appliquer à la construction de la cyclide le mode de génération donné au n° 20. Remarquons d'abord que l'on déduit du raisonnement fait en commençant l'étude de la cyclide la proposition suivante, qui sera plus tard généralisée :

Si l'une des branches de la géodésique principale située dans le plan des centres des sphères enveloppées est un cercle, la surface enveloppe de ces sphères, dont toutes les lignes de courbure sont supposées planes, est une cyclide.

En effet, si la branche (B) par exemple est une circonférence, la courbe (A) est une conique dont l'excentricité est égale au rapport constant m qui existe entre le rayon d'une sphère enveloppée et la distance de son centre à L. Il en résulte, d'après la réciproque démontrée plus haut, que la surface est une cyclide.

Dès lors, pour déduire d'un réseau sphérique de cercles orthogonaux l'une quelconque des cyclides qui l'admettent pour image de leurs lignes de courbure, il suffira de déplacer tous les cônes circonscrits à la sphère ayant leur sommet sur la droite H', par exemple, de façon que l'une des deux génératrices qui forment leur trace sur le plan passant par H' et perpendiculaire à H, devienne tangente à un cercle quelconque tracé dans ce plan. On a donc la construction suivante qui fournit un autre mode de génération de la cyclide.

Pour obtenir l'une quelconque des cyclides ayant pour image sphérique un réseau donné des cercles orthogonaux, tracez dans le plan passant par la droite H' et perpendiculaire à H un cercle arbitraire (B) que vous ferez correspondre par parallélisme de tangentes au cercle (b) suivant lequel le même plan coupe la sphère. Par chaque tangente du cercle (B) menez un cône (C) qui soit homothétique au cône (c) circonscrit à la sphère suivant la tangente parallèle du cercle (b) et qui ait, comme ce dernier, son sommet sur H'. La cyclide sera l'enveloppe des cônes (C), et le cercle de contact de chaque cône résultera de son intersection avec le plan perpendiculaire à son axe mené par le point de contact situé sur (B).

Problème plus général.

23. Il importe de remarquer que cette construction s'applique au cas où la courbe (B) est quelconque, et qu'on a ainsi la solution de ce problème :

Construire une enveloppe de sphères, connaissant son image sphérique et l'une des branches de la géodésique principale (B, B'), qui doit être située dans un plan perpendiculaire à l'une des droites H ou H'.

Si l'on suppose, par exemple, que le plan de la courbe (B) soit perpendiculaire à H, on tracera dans ce plan une droite L parallèle à H', et l'on transportera ensuite ce plan parallèlement à lui-même jusqu'à ce que la droite L coïncide avec H'. Cela fait, on répètera la construction ci-dessus en faisant correspondre la courbe (B) et le cercle (b) de la sphère par parallélisme des tangentes.

§ 3. — Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

Surfaces et courbes résultantes.

24. Avant d'aborder la théorie de ces surfaces, il est utile de donner quelques notions sur les *surfaces résultantes*.

Soient deux surfaces Σ et Σ' dont on fait correspondre les points deux à deux d'une manière quelconque. On appelle *surface résultante* des surfaces données par rapport à une origine arbitraire O, une surface Σ'' dont les rayons vecteurs par rapport à O sont les *sommes géométriques* des rayons vecteurs joignant le même point O aux points correspondants des deux surfaces.

D'après cela, si M et M' sont deux points correspondants des surfaces Σ et Σ' , le point correspondant M'' de la résultante sera le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OM et OM'.

On voit immédiatement :

1° Que la surface résultante est homothétique, dans le rapport de 2 à 1, à la surface lieu des milieux des droites qui joignent les points correspondants des surfaces composantes ;

2° Que, par rapport à trois axes quelconques passant par l'origine O, les coordonnées d'un point de la surface sont les sommes algébriques des coordonnées des points correspondants des surfaces composantes ;

3° Que la forme et l'orientation de cette surface résultante sont indépendantes de l'origine choisie, et ne changent pas non plus quand on

fait subir à l'une des surfaces ou à toutes les deux des translations quelconques.

Si les deux surfaces composantes sont des plans parallèles entr'eux, la surface résultante sera, quel que soit le mode de correspondance adopté, un plan parallèle aux deux premiers et dont la distance à l'origine O est égale à la somme algébrique des distances du point O aux plans donnés.

Dans ce qui suit, nous ferons correspondre les points des deux surfaces pour lesquels les plans tangents sont parallèles, ainsi qu'on le fait dans la représentation sphérique des surfaces, d'après la méthode de Gauss. Alors, le plan tangent en chaque point de la résultante, est le plan résultant des plans tangents aux points correspondants des surfaces composantes.

Nous supposerons, en outre, que les surfaces *ont la même image sphérique*, c'est-à-dire que si un point M de l'une décrit une ligne de courbure, le point M' de l'autre, qui correspond à M par parallélisme des plans tangents, décrit aussi une ligne de courbure de l'autre surface. Dans ce cas, on a la proposition suivante dont M. G. Darboux avait déjà fait usage dans la communication dont nous avons parlé (C. R. 1869, tome 68.)

Lorsque deux surfaces ont la même image sphérique :

- 1° *Leur résultante a la même image sphérique que les composantes ;*
- 2° *Les rayons de courbure principaux de la résultante, en un quelconque de ses points, sont les sommes des rayons de courbure principaux des surfaces composantes aux points correspondants ;*
- 3° *La développée de la résultante est la résultante des développées des surfaces composantes.*

Comme cas particulier, nous ferons observer que les surfaces parallèles à une surface donnée, sont les résultantes de cette surface et d'une d'une série de sphères de rayons quelconques. La réciproque est vraie.

Au lieu de deux surfaces, on pourrait en composer un nombre quelconque. Les propositions précédentes subsisteraient encore.

On peut étendre cette méthode géométrique de composition, aux courbes situées dans le même plan ou dans des plans parallèles, en faisant correspondre les points de ces courbes par parallélisme des tangentes.

Les propriétés relatives aux surfaces s'appliquent aux courbes avec les modifications sur lesquelles il est superflu d'insister.

Lorsque l'une des courbes est un cercle, la résultante est identique à une courbe parallèle à la seconde composante.

Théorème fondamental.

25. — Ceci posé, considérons deux surfaces enveloppées de sphères ayant pour image sphérique un même réseau de cercles orthogonaux, et supposons que les cercles de l'une correspondent aux lignes de seconde courbure de l'autre. Leur résultante sera une surface ayant la même image sphérique que les proposées et, par suite, toutes ses lignes de courbure seront planes. D'ailleurs, cette surface ne sera pas généralement une enveloppe de sphères, puisque pour obtenir ses lignes de courbure, on devra combiner des cercles avec des courbes qui peuvent être quelconques. Elle aura donc plus de généralité que les proposées. Mais cela ne suffit pas pour avoir le droit de conclure que le procédé dont nous venons de parler, fournit *toutes* les surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour les deux systèmes. Il faut pour cela démontrer la réciproque de la proposition précédente. Nous l'énoncerons comme il suit :

THÉORÈME. — *Une surface dont toutes les lignes de courbure sont planes est d'une infinité de manières la résultante des deux surfaces enveloppées de sphères, ayant la même image sphérique que la proposée, et telles que que les cercles de l'une correspondent aux lignes de seconde courbure de l'autre.*

26. — Nous ferons dépendre la démonstration de ce théorème, d'une proposition concernant les surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont planes. Cette proposition, prise dans toute sa généralité, nous sera bientôt utile.

LEMME. — *Il existe une infinité de surfaces enveloppes de sphères ayant la même image sphérique qu'une surface donnée Σ à lignes de première courbure planes, et dont les cercles de courbure soient contenus dans les plans des lignes de première courbure de la surface proposée.*

La surface Σ est telle, par hypothèse, que ses lignes de première courbure S sont situées dans les plans tangents d'une certaine développable (D) , que le plan de toute ligne S , touche suivant une droite D . Pre-

nons sur Σ une ligne de seconde courbure T , et concevons la développable formée par les normales à Σ le long de T . Nous pourrions tracer sur cette développable une infinité de courbes dont les tangentes soient perpendiculaires aux droites D correspondantes, c'est-à-dire telles que la tangente à l'une d'elles, au point où elle coupe la normale en M à Σ , soit perpendiculaire à la droite D , suivant laquelle le plan de la ligne S , passant en M , touche son enveloppe. Soit (C) l'une de ces courbes. De tous les points de cette courbe comme centres, décrivons des sphères touchant Σ aux pieds des normales correspondantes. Nous allons démontrer que la surface E , enveloppe de ces sphères, satisfait aux conclusions de l'énoncé.

Prenons, en effet, sur Σ deux lignes de première courbure S et S' infiniment voisines, coupant T aux points M et M' . Soient C et C' les centres des sphères enveloppées, situés sur les normales à Σ en M et M' . Les tangentes aux courbes S et S' dans les points M et M' se coupent en un point G de D , car ces tangentes sont deux génératrices infiniment voisines de la développable circonscrite à Σ suivant T et, dès-lors, elles se rencontrent en un point appartenant forcément à la droite d'intersection D des plans des lignes de courbure S et S' qui les contiennent.

Or les droites GM et GM' sont tangentes respectivement en M et M' aux sphères enveloppées et ont, de plus, la même longueur puisqu'elles sont normales à T en deux points infiniment voisins. Leur point de rencontre G appartient donc au plan radical des deux sphères, lequel doit être, en outre, perpendiculaire à la ligne des centres CC' et se confond, par conséquent, avec le plan de S qui passe par G , en étant orthogonal, par construction, à l'élément CC' .

Le plan de S' contient donc le cercle de courbure relatif à la sphère enveloppée de centre C . Ainsi, il est prouvé que les lignes S de Σ et les cercles de courbure de E sont contenus dans les mêmes plans.

Si l'on observe maintenant que les surfaces Σ et E se touchent en tous les points de la ligne T qui est une ligne de courbure commune, on en déduira immédiatement que ces surfaces ont la même image sphérique.

Toutes les parties de la proposition sont donc démontrées.

27. Ce lemme étant établi, supposons maintenant, conformément à l'énoncé du théorème qu'il s'agit de prouver, que les lignes de courbure de Σ soient planes dans les deux systèmes, auquel cas la développable (D)

devient un cylindre. Soit E une surface enveloppe de sphères construite comme nous venons de l'indiquer, ayant la même image sphérique que Σ , dont les cercles de courbure soient situés dans les plans des lignes S , et touchant Σ le long d'une ligne commune T de seconde courbure.

On peut regarder Σ comme la résultante de E et d'une autre surface F qui sera, à son tour, la résultante de Σ et de la symétrique E' de E par rapport à O . Or E' a évidemment la même image sphérique que E et, par suite, que Σ . Donc F a la même image sphérique que Σ et, par conséquent, toutes ses lignes de courbure sont planes. Il reste ainsi à prouver que F est une enveloppe de sphères.

Remarquons, à cet effet, que les surfaces Σ et E ont en commun la ligne de courbure T , suivant laquelle elles se touchent, et qui est remplacée dans E' par la symétrique T' de T par rapport à O . Lorsqu'on associera Σ et E' , les lignes de courbure correspondantes fourniront les lignes de courbure de F . Or, les deux lignes de courbure symétriques T et T' ont pour résultante le seul point O . Donc la surface F possède une ligne de courbure se réduisant au point O . Toutes les lignes de courbure de l'autre système, c'est-à-dire celles qui s'obtiennent en combinant les lignes S avec les cercles de E' , devront passer par O , et comme leurs plans sont parallèles à D , ces plans contiendront une droite fixe, savoir la parallèle à D menée par O . Il en résulte, d'après un théorème antérieur (n° 11), que la surface F est une enveloppe de sphères, puisque toutes ses lignes de courbure sont planes et que les plans d'un système passent par une droite fixe.

La réciproque que nous avons en vue est ainsi établie.

Premier mode de génération des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

28. On obtiendra, par suite, toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes en combinant, par voie d'addition géométrique, deux surfaces enveloppes de sphères ayant pour image sphérique un même réseau de cercles orthogonaux. On observera toutefois que les cercles de l'une des surfaces doivent correspondre aux lignes de seconde courbure de l'autre, sans quoi la nouvelle surface, tout en ayant ses lignes de courbure planes, serait une surface enveloppe de sphères, comme les surfaces qui ont servi à la former.

Si l'on applique la solution du n° 19, on voit que deux surfaces enveloppes de sphères remplissant les conditions ci-dessus, doivent être telles que les courbes lieux des centres des sphères enveloppées soient situées dans deux plans rectangulaires, et que les rapports constants qui existent entre les rayons et les distances de leurs centres à deux droites situées respectivement dans chacun de ces plans et perpendiculaires à leur intersection commune, soient inverses l'un de l'autre. On peut supposer, sans changer la résultante, que l'on transporte l'une des surfaces de manière que les deux droites dont nous venons de parler soient concourantes. Un mode de génération des surfaces que nous étudions est donc le suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes, est la résultante de deux surfaces enveloppes de sphères dont les centres parcourent deux courbes planes quelconques (A) et (A') tracées dans deux plans rectangulaires, et dont les rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres à un troisième plan fixe perpendiculaire aux deux premiers, les deux coefficients de proportionnalité étant inverses l'un de l'autre.*

La solution la plus générale comporte, en conséquence, deux fonctions arbitraires, qui correspondent aux courbes planes (A) et (A') dont la forme est quelconque.

Si l'image sphérique de la surface était donnée, il suffirait de prendre, pour les rapports m et m' relatifs aux deux surfaces composantes, les valeurs $\frac{\delta}{r}$ et $\frac{\delta'}{r'}$, où δ , δ' et r ont la signification déjà donnée.

Construction des lignes de courbure.

29. La position de l'origine étant sans influence sur la forme et l'orientation de la résultante, nous supposons, pour simplifier, que l'on compose les surfaces enveloppes de sphères en prenant pour origine le sommet O du trièdre tri-rectangle OXYZ dont il est question dans l'énoncé. Les courbes (A) et (A') seront situées respectivement dans les plans XOY et XOZ.

Nous allons construire, en premier lieu, les lignes de courbure de la surface résultante.

Les lignes de courbure de la première composante sont d'abord les cercles de courbure C, dont les plans sont parallèles à l'axe OZ, et les

sections D de la surface par les plans conduits suivant OY. De même, les lignes de courbure de la seconde composante sont les cercles C' ayant leurs plans parallèles à OY, et, pour le second système, les sections D' de la surface par les plans conduits suivant OZ.

Les cercles de courbure de l'une des surfaces correspondent aux lignes de seconde courbure de l'autre. Prenons, par exemple, un cercle de courbure C de la première. La ligne de courbure D' de la seconde qui lui correspond doit avoir la même image que C. Elle est donc dans un plan parallèle au plan de C. Dès lors, elle est complètement déterminée, puisque l'on sait d'avance que son plan passe par OZ et que la ligne D' est l'intersection complète de la seconde surface par ce plan.

Ceci posé, les lignes de courbure de la résultante s'obtiendront en composant les lignes de courbure correspondantes des surfaces enveloppes de sphères. Les lignes de courbure S du premier système seront les résultantes des cercles C et des lignes D' qui leur correspondent. Pareillement, les lignes de courbure T de l'autre système seront les résultantes des cercles C' et des courbes D correspondantes.

Or, considérons, par exemple, un cercle C et la ligne correspondante D'. Ces deux courbes sont situées dans deux plans parallèles, et le second passe par l'origine. La courbe résultante sera donc située dans le plan de C, et elle sera identique à une courbe parallèle à D', comme résultante de cette courbe et d'un cercle. Ce raisonnement étant général, on peut énoncer le résultat que voici :

Les lignes de courbure de la surface résultante sont situées dans les plans des cercles de courbure (C ou C') de chacune des surfaces composantes, et sont identiques à des courbes parallèles aux lignes de seconde courbure (D' ou D) de ces surfaces composantes.

Centres de courbure principaux.

30. Cherchons, en second lieu, à construire les centres principaux de courbure en un point quelconque M de la résultante (M). Soient S et T les deux lignes de courbure qui se croisent au point M, et supposons, pour fixer les idées, que l'on veuille trouver le centre de courbure relatif à S, c'est-à-dire le point de rencontre des normales aux deux points infiniment voisins M et M' pris sur S. Cette ligne S est la résultante d'un cercle de courbure C de la première composante, et d'une ligne de seconde

courbure D' de l'autre composante. Soient N le point du cercle C , et N' le point de D' que l'on doit associer pour trouver M ; G et G' les centres de courbure des deux composantes aux points N et N' , et relatifs aux courbes C et D' , de telle sorte que G soit le point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins du cercle C , et G' le point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins de D' . Le centre de courbure cherché K s'obtiendra en composant les deux rayons vecteurs OG et OG' , et le rayon principal de courbure sera la somme des rayons de courbure NG , $N'G'$.

Or, le point G est un point de la courbe (A) , savoir le centre de la sphère enveloppée qui contient le cercle de courbure C . Quant au point G' , nous savons, d'après le théorème de M. O. Bonnet, démontré au n° 15, qu'il est contenu dans le plan Q' mené, perpendiculairement à OZ , par la droite suivant laquelle le plan du cercle C' passant en N touche le cylindre enveloppe. Il résulte de là que, le point G étant dans le plan XOY parallèle à Q , le point résultant de G et G' sera dans le plan Q' . D'un autre côté, le plan Q du cercle C' est le plan de la ligne de courbure T passant en M , en vertu de la proposition établie dans le numéro qui précède.

La construction générale des centres principaux de courbure est donc la suivante :

Pour obtenir, en un point de la surface, le centre de courbure relatif à l'une des lignes de courbure S de ce point, prenez la ligne T de l'autre courbure passant en ce point, et, par la droite suivant laquelle son plan touche le cylindre enveloppe, menez un plan perpendiculaire sur la droite à laquelle sont parallèles les plans des lignes S . Le point où ce plan rencontre la normale est le centre de courbure demandé.

Supposons que le point M parcoure une certaine ligne T , et que dans toutes ses positions on construise le centre de courbure K relatif à la ligne variable S passant en ce point. Dans ce cas, le plan Q' restera invariable, et le centre de courbure décrira une certaine courbe de ce plan. On peut donc énoncer le théorème suivant donné par M. O. Bonnet, et qui est une généralisation du théorème du n° 15.

THÉORÈME. — *Lorsqu'une surface a toutes ses lignes de courbure planes, les centres de l'une des courbures S suivant une ligne fixe T de l'autre courbure sont situés sur un plan qui passe par la droite suivant laquelle le plan de cette ligne T touche le cylindre enveloppe,*

et qui est perpendiculaire aux génératrices du cylindre enveloppé par les plans des lignes S.

Développées des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

31. La définition géométrique de la développée résulte des propriétés que nous venons d'établir. On sait, d'une manière générale, que cette développée est la résultante des développées de chacune des surfaces composantes.

Considérons, par exemple, la nappe de la développée qui reçoit les centres de courbure relatifs aux lignes S. Le long d'une ligne T, ces centres de courbure décrivent une courbe située dans un plan Q' perpendiculaire à OZ, et cette courbe est la résultante de la courbe (A), lieu des centres de courbure correspondants G de la première composante, et de la conique (G') (n° 17 et 18) lieu des centres de courbure de la seconde composante. La conique (G') est située dans le plan Q' et la courbe (A) dans le plan XOY, de telle sorte que la résultante sera située dans le plan Q' .

Si l'on change la ligne T, le plan Q' change tout en étant parallèle à XOY, mais la courbe (A) ne change pas, et les coniques (G') restent homothétiques à une conique fixe. Les lignes de la développée résultante sont donc les résultantes d'une ligne fixe (A) et de coniques homothétiques.

Second mode de génération des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

32. Appliquons maintenant à la recherche des surfaces qui font l'objet de cette étude le théorème du n° 20, c'est-à-dire proposons-nous, au moyen de la solution à laquelle nous renvoyons, de résoudre le problème suivant équivalent à cette recherche :

Trouver les surfaces ayant pour image sphérique de leurs lignes de courbure un réseau donné de cercles orthogonaux.

L'une quelconque des surfaces demandées sera la résultante de deux surfaces enveloppes de sphères ayant l'image sphérique donnée, et telles que les cercles de courbure de l'une correspondent aux lignes de seconde courbure de l'autre.

Soient H et H' les droites par lesquelles passent les plans des cercles de l'image sphérique appartenant à chacun des systèmes.

Une première composante s'obtient en transportant parallèlement à H,

et suivant une loi quelconque, les cônes circonscrits à la sphère le long des cercles du réseau dont les plans passent par H' . Cela revient évidemment à transporter les plans tangents à la sphère, parallèlement à H , de longueurs assujetties à la seule condition de rester constantes le long d'un cercle du système H' , et à prendre ensuite la surface enveloppe de ces plans dans leurs nouvelles positions.

On verrait pareillement que la seconde composante peut être regardée comme l'enveloppe des plans que l'on obtient en transportant les plans tangents à la sphère, parallèlement à H' , de longueurs qui soient constantes le long d'un cercle du système H .

La surface cherchée sera la résultante des deux enveloppes de sphères ainsi obtenues, et l'un quelconque de ses plans tangents sera le plan résultant des plans correspondants des surfaces composantes, c'est-à-dire *des deux positions d'un même plan tangent à la sphère*.

On énoncera donc le théorème suivant qui donne une seconde solution du problème posé dès le commencement de cette étude.

THÉORÈME. — *Soit tracé sur une sphère un réseau quelconque de cercles orthogonaux, et soient H et H' les droites suivant lesquelles se coupent respectivement les plans des cercles de chaque système. Transportons le plan tangent en un point quelconque de la sphère, d'abord parallèlement à H et ensuite parallèlement à H' , de longueurs variant suivant deux lois continues quelconques, telles cependant que les translations parallèles à l'une des droites H ou H' demeurent constantes quand le point de la sphère décrit un cercle passant par l'autre. La surface enveloppe du plan résultant des deux positions d'un même plan tangent à la sphère sera la surface la plus générale dont les lignes de courbure aient pour image sphérique le réseau donné.*

On obtiendra toutes les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, en appliquant cette construction à tous les réseaux sphériques de cercles orthogonaux.

Les deux fonctions arbitraires qui régissent le problème sont représentées, dans cette solution, par des longueurs comptées, à partir des points de la sphère, dans les directions des droites H et H' . C'est ce qui explique pourquoi le nouvel énoncé présente l'avantage de conduire, plus simplement que celui du n° 28, aux équations des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

CHAPITRE II

DES SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES POUR UN SYSTÈME

§ 1. — **Propriétés générales et construction des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes.**

Nous nous proposons d'étudier, dans ce chapitre, les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes, les lignes de l'autre courbure n'étant assujetties à aucune condition donnée d'avance. Quelques-unes de ces surfaces possèdent un mode de génération relativement simple.

Surfaces de Monge.

33. Nous citerons, en premier lieu, les surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans des plans normaux à la surface. Monge a montré que les surfaces de cette sorte sont engendrées par une courbe plane de forme arbitraire dont le plan roule sans glisser sur une surface développable quelconque en entraînant la courbe donnée. Les différentes positions de la courbe génératrice sont les lignes de première courbure de la surface, et les lignes de seconde courbure sont les trajectoires décrites par les différents points de la courbe mobile. Si la développable devient un cylindre, les lignes de seconde courbure sont situées dans des plans parallèles entre eux et perpendiculaires aux génératrices du cylindre. On retombe ainsi sur le cas particulier examiné au n° 6. Si la développable est un cône, les lignes de seconde courbure appartiennent visiblement à des sphères ayant toutes pour centre le sommet du cône. Nous rappellerons encore, au sujet de ces surfaces de

Monge, que l'illustre auteur a fait connaître un second mode de génération, d'après lequel toute surface de cette sorte est le lieu des positions successives d'un profil arbitraire, mais constant, poussé normalement sur une développable quelconque de façon que deux points du profil décrivent deux lignes de courbure de la développable donnée.

Enveloppes de sphères.

34. Nous considérerons, en second lieu, les surfaces enveloppes de sphères. On sait que leurs lignes de première courbure sont les caractéristiques; c'est-à-dire les cercles de contact de chaque sphère avec l'enveloppe.

Quant aux lignes de seconde courbure, trajectoires orthogonales des premières, leur recherche directe présente, dans le cas général, de grandes difficultés. Le théorème de M. Ribaucour (Voir l'Introduction, II) permet, à la vérité, connaissant trois de ces trajectoires, de trouver toutes les autres. Mais il paraît difficile, excepté dans les cas où les plans de cercles de courbure enveloppent un cylindre ou un cône, de disposer les données de façon à connaître trois lignes de seconde courbure. Nous verrons bientôt qu'il est aisé d'éviter cet inconvénient par la considération des surfaces résultantes. (Voir plus loin, n° 52.)

La construction de l'enveloppe de sphères la plus générale comporte trois fonctions arbitraires. On peut, en effet, choisir à volonté la courbe (C), lieu des centres C des sphères, ce qui introduit, dans la définition de la surface, deux fonctions arbitraires d'une seule variable, et prendre ensuite, pour le rayon d'une sphère enveloppée quelconque, une fonction également arbitraire de cette variable.

Si l'on admet que l'enveloppe soit déterminée comme nous venons de le dire, il est aisé de trouver ses éléments principaux. Le cercle de courbure relatif à une sphère enveloppée quelconque, est perpendiculaire à la tangente à la courbe (C) en C, et coupe cette tangente en un point Q tel que

$$CQ = - \frac{rdr}{ds},$$

où r désigne le rayon de la sphère enveloppée, et ds , l'élément d'arc

de (C). Le plan du cercle de courbure coupe l'enveloppe, en tous les points de ce cercle, sous un angle θ donné par la formule

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds}.$$

Enveloppes de sphères ayant même image sphérique.

35. On conçoit aussi que la surface enveloppe de sphères puisse être définie par d'autres conditions. Pour en donner un exemple qui nous sera bientôt utile, proposons-nous de trouver *toutes les enveloppes de sphères ayant la même image sphérique qu'une enveloppe de sphères donnée.*

Soit E une enveloppe de sphères, et E' une autre enveloppe de sphères ayant la même image sphérique que E. Sur les deux surfaces, les cercles de courbure correspondants sont situés dans des plans parallèles coupant les deux surfaces sous le même angle. Concevons les développables circonscrites aux deux surfaces suivant leurs cercles de courbure. Ces développables sont des cônes droits, et, pour les deux surfaces, les cônes correspondants sont égaux. De plus, si l'on considère les courbes (Ω) et (Ω') , lieu des sommets de ces cônes circonscrits, il est visible qu'aux sommets de deux cônes correspondants, les tangentes à ces courbes sont parallèles, car le système formé par deux cônes infiniment voisins circonscrits à la première surface est homothétique au système formé par les deux cônes correspondants de la seconde.

Réciproquement, soit E une enveloppe de sphères, et (Ω) la courbe lieu des sommets des cônes droits circonscrits à la surface suivant les cercles de courbure. Soit, en outre (Ω') , une courbe dont les tangentes soient parallèles aux tangentes de la courbe (Ω) , de telle sorte que les points correspondants des deux courbes soient ceux pour lesquels les tangentes ont la même direction. Transportons chacun des cônes droits circonscrits à E parallèlement à lui-même, de façon que son sommet, primitivement situé sur (Ω) , vienne se placer sur le point correspondant de (Ω') . Il s'agit de démontrer que la surface enveloppe des nouvelles positions de ces cônes est d'abord une enveloppe de sphères, et, en second lieu, qu'elle possède la même image sphérique que la proposée.

Si l'on considère, en effet, deux cônes infiniment voisins circonscrits

à E et leurs nouvelles positions, la seconde figure est homothétique à la première, car les cônes sont parallèles deux à deux, ainsi que les droites réunissant leurs sommets. Il en résulte que les caractéristiques des cônes sont, dans la première comme dans la seconde figure, des cercles dont les plans sont parallèles et coupent les cônes sous les mêmes angles. La proposition est ainsi établie, et l'on obtient l'énoncé suivant, qui est la généralisation de celui du n° 20.

THÉORÈME. — *Toute surface enveloppe de sphères ayant la même image sphérique qu'une enveloppe de sphères donnée, est aussi l'enveloppe des cônes droits que l'on déduit des cônes droits circonscrits à la proposée suivant les cercles de courbure, quand on les transporte parallèlement à eux-mêmes de façon que les courbes, lieux des sommets de ces cônes, aient leurs tangentes parallèles aux points correspondants.*

La solution de notre problème est ramenée, en dernière analyse, à la construction des courbes dont les tangentes sont parallèles aux tangentes d'une courbe donnée (Ω) . L'une quelconque des courbes demandées est évidemment l'arête de rebroussement d'une développable dont les plans tangents se déduisent des plans osculateurs de (Ω) , en transportant ceux-ci, parallèlement à eux-mêmes, de longueurs variant suivant une loi continue quelconque. On en conclut que le problème de la recherche des surfaces enveloppes de sphères ayant même image sphérique qu'une enveloppe de sphères donnée, comporte une seule fonction arbitraire, et ne donne lieu à aucune intégration.

Dans le cas particulier où la surface donnée E se réduit elle-même à une sphère, la construction qui précède donne celle du problème suivant :

Trouver les enveloppes de sphères dont les cercles de courbure aient pour image sphérique une famille donnée de cercles.

La solution n'exige aucune intégration.

Nous ferons encore observer que, si l'on connaît les lignes de seconde courbure de la surface E , on connaîtra, par cela même, celles de toutes les surfaces enveloppes de sphères ayant la même image sphérique que la première.

Théorème fondamental.

36. Dans toute surface dont les lignes de première courbure sont planes, nous aurons à considérer principalement :

1° Les lignes de courbure planes que nous désignerons par S ;

2° La développable enveloppe (D) des plans de ces lignes de courbure, de telle sorte que D sera la droite de contact du plan de la ligne S avec cette enveloppe ;

3° Les lignes de seconde courbure T ;

4° Les développables (H) circonscrites à la surface suivant les lignes T.

Il importe de remarquer *que les arêtes de rebroussement G des développables (H) sont des courbes appartenant à la développable (D).*

Considérons, en effet, une ligne T et les points où elle rencontre à angles droits les lignes S. Les génératrices de la développable (H) circonscrite à la surface suivant T, sont tangentes aux lignes S, et deux génératrices infiniment voisines, tangentes à deux courbes S infiniment voisines, ne peuvent se couper que sur la droite D d'intersection des plans de ces lignes S. Un point quelconque de l'arête de rebroussement de (H) appartient donc à (D).

Nous aurons encore à faire usage des considérations suivantes. *Nous dirons que deux courbes tracées sur une développable (D) sont parallèles relativement à cette développable, lorsque leurs tangentes aux points où elles rencontrent une même génératrice de (D) sont parallèles.*

Si la développable (D) est un cylindre, deux courbes parallèles, relativement à ce cylindre, sont égales et se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle aux génératrices de ce cylindre.

Si (D) est un cône, deux courbes seront parallèles, relativement à ce cône, lorsqu'elles seront homothétiques par rapport à son sommet.

Dans le cas où (D) est quelconque, on obtient toutes les courbes parallèles à une courbe G tracée sur cette développable par la construction suivante. Déformez (D) par des rotations autour de ses génératrices, de façon que G devienne plane. Dans cette nouvelle forme de (D), les transformées des courbes parallèles à G seront situées dans des plans parallèles au plan P de la transformée de G. On fera donc les sections de la nouvelle développable par des plans parallèles à P, et, en reconstituant

la développable primitive, on aura, dans les transformées de ces sections, les courbes demandées. On voit que la solution analytique comporte une quadrature, et que les positions des courbes parallèles à G dépendent des valeurs d'un paramètre arbitraire qui sera, par exemple, un segment compté sur une génératrice donnée. Ces préliminaires étant posés, nous énoncerons la proposition suivante :

THÉORÈME. — 1° *Lorsque les lignes de première courbure de deux surfaces Σ et Σ' sont situées dans les plans tangents d'une même développable (D), et que ces surfaces ont la même image sphérique, les arêtes de rebroussement des développables qui leur sont tangentes, suivant deux lignes de seconde courbure correspondantes quelconques, sont parallèles relativement à (D);*

2° *Réciproquement, soit Σ une surface dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'une développable (D). Si l'on remplace les développables circonscrites à cette surface, suivant les lignes de seconde courbure, par d'autres développables ayant pour arêtes de rebroussement des courbes parallèles aux premières relativement à (D), de telle sorte que le paramètre définissant individuellement les nouvelles courbes soit une fonction continue quelconque du paramètre définissant les courbes primitives, la surface enveloppe Σ' des nouvelles développables aura même image sphérique que Σ , et ses lignes de première courbure seront encore situées dans les plans tangents de (D).*

Pour démontrer la proposition directe, il suffit d'observer que les développables (H) et (H') circonscrites aux deux surfaces Σ et Σ' , suivant deux lignes T et T' correspondantes, ont leurs plans tangents parallèles deux à deux, et comme, d'autre part, leurs arêtes de rebroussement sont situées sur (D), ces courbes sont parallèles relativement à D.

Inversement, soit Σ une surface dont les lignes de première courbure S appartiennent aux plans tangents d'une développable (D).

Considérons les développables (H) circonscrites à ces surfaces suivant les lignes de seconde courbure T, et dont les arêtes de rebroussement G sont situées sur (D). Chacune de ces courbes possède une infinité de courbes parallèles relativement à (D), et l'une de ces dernières sera déterminée si l'on connaît le point où elle rencontre une génératrice fixe de cette développable. Choisissons, en conséquence, sur (D) une génératrice fixe

que la série continue des arêtes de rebroussement G rencontre en des points r . Faisons correspondre à ces points r des points r' situés sur la même génératrice et liés aux premiers par une loi continue quelconque. Par chaque point r' , menons la courbe G' parallèle, relativement à (D) , à la courbe G qui passe par le point correspondant r . Soit enfin Σ' la surface enveloppe des développables (H') , ayant pour arêtes de rebroussement les courbes G' ainsi définies. Il s'agit de démontrer que la surface Σ' a pour lignes de première courbure les sections produites par les plans tangents de (D) , et qu'elle possède la même image sphérique que la surface proposée Σ .

Coupons, en effet, la figure par un plan P tangent à (D) . Ce plan rencontrera Σ et Σ' respectivement suivant deux lignes S et S' , qui seront les enveloppes des droites suivant lesquelles ce plan coupe les diverses développables (H) et (H') . Or, par construction, ces génératrices sont parallèles deux à deux, et les plans tangents aux développables sont de même parallèles. Donc les courbes S et S' se correspondent par parallélisme des tangentes, et, aux points correspondants, les plans tangents, à Σ et Σ' sont parallèles. Mais S étant une ligne de courbure de Σ , le plan tangent de Σ , le long de S , fait un angle constant θ avec P . Il en résulte, d'après ce qui précède, que le plan tangent à Σ' fait, en tous les points de S' , l'angle constant θ avec P et, par suite, que S' est une ligne de courbure de Σ' ayant la même image sphérique S .

La proposition est ainsi démontrée, et l'on peut observer, en outre, que les lignes de seconde courbure de Σ' sont les caractéristiques, c'est-à-dire les intersections successives des développables (H') .

38. Le théorème précédent donne le moyen de construire toutes les surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents d'une développable, et qui possèdent une image sphérique donnée, quand on connaît une surface particulière répondant à ces conditions. Or, parmi ces surfaces, il existe toujours une enveloppe de sphères, d'après le lemme établi au n° 26. On obtiendra donc la surface la plus générale dont les lignes de courbure sont planes pour un système, en appliquant la construction indiquée par le théorème que nous venons d'établir, à la surface enveloppe de sphères la plus générale, pourvu que l'on ait déterminé préalablement les lignes de seconde courbure de cette dernière.

Nous allons exposer la marche à suivre pour réaliser cette détermination, en partant des cas simples où la développable (D) est un cylindre ou un cône, pour nous élever ensuite au cas général.

I. — *Des surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre.*

39. Malgré que les surfaces à l'étude forment un cas particulier de celles dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône, nous croyons devoir leur consacrer un article spécial, en raison des constructions intéressantes auxquelles elles conduisent.

Enveloppes de sphères; construction des lignes de seconde courbure.

Considérons, en premier lieu, les enveloppes de sphères dont les cercles de courbure sont contenus dans les plans tangents d'un cylindre. L'une quelconque de ces surfaces est évidemment l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une courbe plane quelconque (C), la loi de variation du rayon étant arbitraire. Les plans des cercles de courbure enveloppent un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan Q de (C). La section de la surface par le plan Q, qui est un plan de symétrie, est une géodésique principale rencontrant normalement *en deux points* chacun des cercles de courbure. Dès lors, d'après le théorème de M. Ribaucour, si l'on connaît une autre ligne de seconde courbure, on les connaîtra toutes. C'est effectivement ce qui a lieu, comme nous allons le faire voir.

Soit T une ligne de seconde courbure de l'enveloppe de sphères considérée, coupant en A un cercle quelconque S, et (H) la développable circonscrite correspondante pour laquelle T est aussi une ligne de courbure. Transportons cette développable parallèlement à elle-même, d'une longueur quelconque, dans la direction des génératrices, et cette translation étant faite, construisons les lignes de courbure de la nouvelle développable (H₁). Elles s'obtiennent en portant sur les génératrices, à partir de la ligne T₁, qui correspond à T, des segments de longueur constante; soit T₂ une des lignes de courbure de (H₁), joignons le point A₂ où T₂ coupe une génératrice quelconque de (H₁) au point A où T rencontre la position primitive de cette génératrice. La droite A A₂ sera située dans le plan du

cercle S passant en A , car ce cercle est tangent à la génératrice de H , aboutissant en A , et comme $A A_2$ coupe S au point A , elle le coupera de nouveau en un autre point B . Je dis que la courbe lieu des points B , est une ligne de seconde courbure de la surface considérée. Pour cela, il suffit de prouver que la tangente à cette courbe, en un point B , est perpendiculaire à la tangente au cercle S en B .

Remarquons, à cet effet, que les tangentes aux courbes T et T_2 aux points A et A_2 sont parallèles. Il en résulte que la droite $A A_2$ décrit une développable, et que la tangente en B , au lieu des points B , est contenue dans le plan tangent à cette développable suivant $A A_2$. Ce plan tangent passe par la tangente en A à T , et, par suite, par le sommet Ω du cône droit circonscrit à l'enveloppe de sphères suivant le cercle S . D'un autre côté, la tangente cherchée est située dans le plan tangent en B à cette dernière surface; comme ce plan tangent contient aussi le point Ω , la tangente en B doit passer par Ω , puisqu'elle est la droite d'intersection de deux plans renfermant ce point, et, dès lors, elle coupe orthogonalement le cercle S , comme nous l'avons annoncé.

En faisant varier la courbe T_2 sur (H_1) , le point B prendra toutes les positions possibles sur le cercle S , et l'on construira ainsi toutes les lignes de seconde courbure de la surface proposée. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Les lignes de seconde courbure d'une surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre, sont en collinéation avec l'une d'entre elles T , et les lignes de courbure d'une développable déduite de la développable (H) circonscrite à la surface suivant T , par une translation parallèle aux génératrices du cylindre.*

40. Il résulte de là, comme nous l'avons déjà dit, que l'on construira géométriquement toutes les lignes de seconde courbure, quand on connaîtra l'une d'elles. Or, on peut remplacer les deux fonctions arbitraires qui entrent dans la définition des surfaces étudiées, par deux autres qui mettent en évidence une ligne T et la développable (H) , auquel cas les autres lignes T seront déterminées sans nouvelle intégration. En se plaçant à ce point de vue, on peut donner des enveloppes de sphères dont on s'occupe, le mode de génération que voici :

THÉORÈME. — *Toute surface enveloppe de sphères dont les cercles de*

courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre, est l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur un plan Q perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et qui touche une développable donnée (H) en tous les points d'une ligne de courbure T. Chaque cercle de courbure résulte de l'intersection de la sphère enveloppée, par le plan mené, perpendiculairement à Q, par la génératrice de (H) qui aboutit au point de contact de la sphère et de la développable.

Les lignes de seconde courbure se déduisent de T, à l'aide du théorème de collinéation.

On voit encore que le cylindre (D), enveloppe des plans des cercles de courbure, est celui qui projette, sur le plan Q, l'arête de rebroussement G de la développable initiale (H).

Dans cette solution, les deux fonctions arbitraires correspondent à la développable (H).

Construction de la surface la plus générale, dont les lignes de courbure d'un système appartiennent aux plans tangents d'un cylindre.

41. Pour passer des surfaces enveloppes de sphères aux surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre, il faudra appliquer le théorème du n° 37, en remarquant que les nouvelles développables (H') sont identiques, dans ce cas, aux développables (H), et se déduisent de ces dernières par des translations parallèles aux génératrices de (D), la grandeur de la translation variant d'une développable (H) à la suivante, d'après une loi continue quelconque. Cela revient à transporter les plans tangents de la surface enveloppe de sphères, dans la direction des génératrices, de longueurs qui restent constantes par tous les points d'une ligne de seconde courbure. La construction des surfaces cherchées est donc la suivante :

THÉORÈME. — *Toute surface dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre, se déduit d'une surface enveloppe de sphères de cette espèce, en transportant les plans tangents de celle-ci, parallèlement aux génératrices du cylindre, de longueurs assujetties à la seule condition de rester constantes quand le point de contact parcourt une ligne de seconde courbure.*

La surface enveloppe des positions nouvelles de ces plans tangents est la surface demandée. Ses lignes de courbure des deux systèmes cor-

respondent aux lignes de courbure de l'enveloppe de sphères. Elle a même image sphérique que cette dernière, et ses lignes de courbure planes appartiennent aux plans tangents du même cylindre (n° 37).

On peut dire aussi que les lignes de seconde courbure sont les caractéristiques des nouvelles développables (H') identiques aux développables (H). — Il en résulte que ces lignes de seconde courbure sont identiques aux lignes de seconde courbure correspondantes de l'enveloppe de sphères initiale, ou à des courbes qui leur sont parallèles. On engendrera, bien entendu, la surface enveloppe de sphères initiale par le procédé du numéro précédent, au moyen duquel les lignes de seconde courbure sont mises en évidence.

Il résulte de la construction ci-dessus, que la définition de la surface la plus générale de l'espèce étudiée, comporte trois fonctions arbitraires, savoir : les deux fonctions correspondant à l'enveloppe de sphères et une troisième, relative à la loi de translation des développables (H). La signification géométrique des deux premières a été déjà donnée. On peut interpréter géométriquement la troisième fonction arbitraire, de façon à donner en même temps la construction ponctuelle de la surface.

Construction ponctuelle de la surface.

42. Prenons, à cet effet, dans le plan d'un cercle de courbure S de l'enveloppe de sphères initiale, une courbe arbitraire S' que nous regarderons comme la ligne de première courbure de la surface à construire qui doit correspondre à S. Faisons correspondre, en conséquence, la courbe S' et le cercle S par parallélisme des tangentes. Si l'on considère une développable (H) circonscrite à l'enveloppe de sphères suivant une ligne de seconde courbure rencontrant le cercle S en M, la développable correspondante (H') de la surface cherchée se déduira de la première par une translation parallèle aux génératrices du cylindre qu'enveloppent les plans des cercles de courbure et qui sera déterminée, puisqu'elle doit avoir pour effet d'amener la tangente au cercle S en M sur la tangente correspondante en M' de la courbe S'. En outre, la ligne de seconde courbure de la surface demandée passant en M' sera connue, car elle doit être identique à celle de la développable primitive (H) passant par le point qui, après la translation, est venu en M'. Donc, la donnée de la

courbe S' permet de construire les lignes de seconde courbure qui sont les caractéristiques de la nouvelle surface, et cette donnée correspond à la troisième fonction arbitraire que comporte la solution.

Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

43. Les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, forment un cas particulier du précédent. Elles correspondent au cas où la ligne initiale T est plane. En effet, dans cette hypothèse, la surface enveloppe de sphères est telle que, les lignes de première courbure appartenant aux plans tangents d'un cylindre, une ligne de seconde courbure T est dans un plan oblique aux génératrices de ce cylindre. En vertu d'une propriété démontrée (n° 5), toutes les lignes de seconde courbures de la surface enveloppe de sphères sont planes, et la surface qu'on en déduit par la construction du numéro précédent a toutes ses lignes de courbure planes, puisqu'elle possède la même image sphérique que la première. Ainsi, d'après le théorème du n° 41, *toute surface dont les lignes de courbure sont planes pour les deux systèmes, est l'enveloppe des plans que l'on déduit des plans tangents d'une enveloppe de sphères de cette espèce, quand on transporte ces plans parallèlement à eux-mêmes, dans la direction des génératrices du cylindre enveloppé par les plans des cercles de courbure, de façon que la grandeur de la translation reste constante quand le point de contact du plan tangent décrit une ligne de seconde courbure, et varie, d'après une loi continue quelconque, en passant d'une de ces lignes à la ligne infiniment voisine.* — Cette construction revient au fond à l'une de celles que nous avons données au chapitre I^{er}.

Surfaces de Joachimstal.

44. Nous avons déjà désigné sous ce nom (n° 11) les surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans des plans passant par une droite fixe D . Nous appliquerons à ces surfaces le mode de génération qui vient d'être indiqué, et nous vérifierons, en même temps, que les lignes de seconde courbure appartiennent à des sphères dont les centres sont sur D et qui coupent orthogonalement la surface.

Nous devons construire, en premier lieu, une surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure soient contenus dans des plans passant par la droite D , ce qui exige que les sphères enveloppées aient D pour axe radical.

THÉORÈME. — *Toute surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure sont situés dans des plans contenant une droite fixe D , est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une courbe arbitraire (C) tracée dans un plan Q perpendiculaire à D et qui rencontre cette droite en deux points fixes, réels ou imaginaires.*

Les lignes de seconde courbure T de cette surface résultent de son intersection par les sphères G ayant leurs centres sur D et coupant orthogonalement les sphères enveloppées.

Car une sphère G étant orthogonale aux sphères du système, coupera orthogonalement la surface enveloppe en tous les points de son intersection avec elle, de telle sorte que cette intersection sera une ligne de seconde courbure de la surface considérée.

On voit encore que les développables (H) sont, dans ce cas, des cônes ayant pour sommets les centres G , situés sur D , des sphères orthogonales.

Car lorsqu'une sphère coupe orthogonalement une surface en tous les points de son intersection avec elle, le plan tangent à la surface en un point quelconque de l'intersection passe par le centre de la sphère.

Les surfaces particulières que nous venons de rencontrer ont été étudiées par M. Amigues (*Nouvelles annales mathématiques*, 1877, page 343), qui les a désignées sous le nom de *Girocyclides*, et qui a montré qu'on peut les construire en appliquant aux surfaces coniques la transformation par rayons vecteurs réciproques. — On déduira maintenant les surfaces de *Joachimstal* des *Girocyclides* par le procédé du n° 41, ce qui conduira à l'énoncé suivant.

THÉORÈME. — *Toute surface de Joachimstal est l'enveloppe des cônes que l'on déduit des cônes circonscrits à une girocyclide arbitraire suivant ses lignes de seconde courbure, quand on transporte ces cônes parallèlement à eux-mêmes, de façon que leurs sommets se déplacent, d'après une loi continue quelconque, sur la droite D qui réunit leurs positions primitives.*

Les lignes de première courbure sont les sections de la surface par les plans contenant la droite D.

Les lignes de seconde courbure sont les caractéristiques des nouveaux cônes. Il est visible qu'elles sont homothétiques aux lignes de seconde courbure de la girocyclide initiale, le rapport d'homothétie variant quand on passe de l'une d'entre elles à la ligne infiniment voisine. Elles sont donc sphériques comme les premières. Les sphères qui les contiennent ont leurs centres sur la droite D et coupent orthogonalement la surface.

La définition de la surface générale de Joachimstal comporte deux fonctions arbitraires, relatives : la première, à la girocyclide initiale, et la seconde, à la loi de translation des cônes circonscrits suivant les lignes de seconde courbure.

Autre mode de génération des surfaces de Joachimstal.

Pour terminer ce qui est relatif aux surfaces de Joachimstal, nous énoncerons une propriété de leurs lignes de seconde courbure. Cette propriété, facile à vérifier dans le cas des girocyclides, s'étend d'elle-même aux surfaces que l'on en déduit.

Les projections stéréographiques des lignes de courbure sphériques d'une surface de Joachimstal sont des courbes homothétiques quand on prend les points de vue sur la droite D.

On en déduit une construction très simple d'une surface de Joachimstal dont on connaît une ligne de première courbure et une ligne de seconde courbure; la première S étant arbitraire, et la seconde T étant assujettie à rencontrer S à angle droit en un point M, et à être située sur la sphère ayant son centre sur D et coupant orthogonalement S en M.

II. — *Surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cône.*

Surfaces enveloppes de sphères. — Construction des lignes de seconde courbure.

45. Les surfaces enveloppes de sphères dont les cercles de courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône sont caractérisées par cette

condition que les sphères enveloppées doivent couper orthogonalement une sphère fixe ayant pour centre le sommet du cône.

S'il existe, en effet, une surface de cette sorte, le sommet du cône par lequel passent les plans de tous les cercles de courbure est le centre radical de quatre sphères infiniment voisines quelconques. Ce point est donc d'égale puissance par rapport à toutes les sphères enveloppées, et, par suite, celles-ci coupent orthogonalement une sphère ayant ce sommet pour centre.

Réciproquement, si les sphères d'un système sont assujetties à couper orthogonalement une sphère fixe de centre O , le plan radical de deux sphères infiniment voisines quelconques passera par le point O qui est d'égale puissance par rapport à ces deux sphères, et comme ce plan radical contient le cercle de courbure relatif à l'une de ces sphères, on voit bien que les cercles de courbure de l'enveloppe appartiennent aux plans tangents d'un cône de sommet O .

L'une des lignes de seconde courbure d'une pareille surface est connue *a priori*. Elle résulte de l'intersection de la surface enveloppe par la sphère orthogonale ayant pour centre le sommet du cône. Cette courbe coupe normalement en deux points chacun des cercles de courbure, car la sphère qui la contient coupe orthogonalement en deux points tous ces cercles de courbure. On est donc certain, à l'avance, d'après le théorème de M. Ribaucour, que l'on pourra construire toutes les lignes de seconde courbure de la surface quand on en connaîtra une seule distincte de celle qui est située sur la sphère de centre O . Voici comment nous justifierons cette assertion.

Soit T une ligne de seconde courbure de l'enveloppe considérée; (H) la développable circonscrite correspondante. Concevons le cône (H_1) ayant pour sommet le point O , et dont les génératrices sont parallèles aux génératrices de (H) . Les lignes de courbure de ce cône (H_1) ne sont autres que ses lignes d'intersection avec les sphères de centre O . Prenons à volonté une de ces lignes de courbure T_1 , et joignons chacun des points A_1 , où elle rencontre les génératrices de (H_1) , aux points A , où la ligne T rencontre les génératrices correspondantes, c'est-à-dire parallèles de (H) . Chacune des droites AA_1 sera située dans le plan du cercle de courbure passant en A ; car ce cercle est tangent à la génératrice de H aboutissant en A , et comme son plan passe par O , ce plan contient aussi la généra-

trice OA_1 du cône (H_1) , La ligne AA_1 , située dans le plan du cercle, coupe ce cercle en un point A. Elle le coupera donc en un autre point B. Je dis que la courbe, lieu des points B, est une ligne de seconde courbure de la surface enveloppe, ou, en d'autres termes, qu'elle coupe orthogonalement tous les cercles de courbure.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que les tangentes aux courbes T et T_1 , dans les points correspondants A et A_1 , sont parallèles, et que, par suite, la ligne AA_1 engendre une développable. En répétant le raisonnement employé dans le cas du cylindre (n° 39), on verrait que la tangente en B à la courbe considérée, est une génératrice du cône circonscrit à la surface suivant le cercle de courbure S passant en B, ce qui démontre la proposition.

En faisant varier la courbe T_1 sur (H_1) , le point B prendra toutes les positions possibles sur S, et l'on obtiendra conséquemment toutes les lignes de seconde courbure.

Ces résultats peuvent être énoncés comme il suit :

THÉORÈME. — *Les lignes de seconde courbure d'une surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône O, sont en collinéation avec l'une d'entre elles T, et les lignes de courbure d'un autre cône obtenu en transportant parallèlement, au sommet du premier, les génératrices de la développable (H) circonscrite à la surface suivant T.*

46. Ce théorème donne évidemment le moyen de construire toutes les lignes de seconde courbure, quand on connaît l'une d'elles T distincte de celle qui appartient à la sphère orthogonale de centre O. Pour cette dernière, la développable (H) et le cône (H_1) se confondent, de telle sorte que l'application de la construction précédente ne donne rien. On peut remarquer que le cône ayant pour sommet le point O et une ligne T pour directrice, coupe encore la surface enveloppe suivant une ligne de seconde courbure.

Ceci posé, on est en droit de remplacer les deux fonctions arbitraires qui entrent dans la définition des surfaces, dont nous nous occupons en ce moment, par deux autres mettant en évidence une ligne T et la développable (H), auquel cas les autres lignes T s'obtiendront sans nouvelle intégration. Sous ce point de vue, la génération de ces surfaces sera la suivante :

THÉORÈME. — *Toute surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône, est l'enveloppe d'une sphère assujettie à couper orthogonalement une sphère fixe O, et à toucher une développable (H) en tous les points d'une ligne de courbure T.*

Chaque cercle de courbure résulte de l'intersection de la sphère enveloppée avec le plan passant par O et la génératrice de (H), qui aboutit au point de contact de cette sphère sur la développable.

Les lignes de seconde courbure se déduisent de T, au moyen du théorème de collinéation.

Enfin, le cône (D), auquel sont tangents les plans des cercles de courbure, a pour sommet O, et pour directrice, l'arête de rebroussement de (H).

Dans cette solution, les deux fonctions arbitraires correspondent à la développable (H).

On peut encore observer que toutes les surfaces enveloppes de sphères tangentes à une développable (H) en tous les points d'une ligne de courbure T, et coupant orthogonalement des sphères concentriques, ont la même image sphérique et que leurs cercles de courbure sont situés dans les plans tangents du même cône.

Construction de la surface la plus générale dont les lignes de courbure d'un système soient contenues dans les plans tangents d'un cône.

47. Pour trouver les surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône, nous appliquerons aux surfaces enveloppes de sphères que l'on vient de définir, la construction résultant du théorème fondamental (n° 37). Dans ce cas, les développables (H) seront remplacées par des développables homothétiques par rapport au point O, puisque les arêtes de rebroussement de deux développables correspondantes doivent être parallèles relativement à un cône (D) de sommet O. Cela revient évidemment à remplacer les plans tangents de la surface enveloppe de sphères par des plans parallèles, tels que le rapport des distances du point O aux deux positions du même plan tangent reste constant le long d'une ligne T.

Le mode de génération de ces surfaces est donc le suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents d'un cône, est l'enveloppe des plans parallèles aux plans tangents d'une enveloppe de sphères de cette espèce, tels que le rapport des distances du sommet du cône aux plans tangents correspondants des deux surfaces, conserve une valeur constante quand le point de contact de l'un d'eux parcourt une ligne de seconde courbure, ce même rapport variant, d'après une loi continue quelconque, quand on passe d'une de ces lignes à la ligne infiniment voisine.*

La surface primitive et la surface obtenue ont la même image sphérique. Leurs lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents du même cône, et leurs lignes de seconde courbure se correspondent.

On peut dire encore que les lignes de seconde courbure sont les caractéristiques des nouvelles développables (H') homothétiques aux développables primitives (H). Il en résulte que ces lignes de seconde courbure sont homothétiques aux lignes de seconde courbure correspondantes de l'enveloppe de sphères initiale, ou bien à des lignes qui leur sont parallèles.

Pour construire la surface enveloppe de sphères initiale, on fera usage du mode de génération du num^{ro} précédent, par lequel les lignes de seconde courbure sont mises en évidence.

Il résulte de cette construction que la définition de la surface la plus générale de l'espèce étudiée comporte trois fonctions arbitraires, savoir : les deux fonctions propres à l'enveloppe des sphères et une troisième, relative à la variation du rapport des distances au point O des deux positions d'un même plan tangent.

48. Ou interprétera géométriquement la troisième fonction arbitraire, comme dans le cas précédent.

Construction ponctuelle de la surface.

Dans le plan d'un cercle de courbure S de l'enveloppe de sphères initiale; prenons une courbe arbitraire S' , que nous regarderons comme la ligne de première courbure de la surface demandée qui doit correspondre à S . Faisons donc correspondre le cercle S et la courbe S' par parallé-

lisme des tangentes. Si (H) est une développable circonscrite à l'enveloppe de sphères suivant une ligne de seconde courbure rencontrant le cercle S en M , la développable correspondante (H') de la surface cherchée sera homothétique de la première par rapport au sommet O du cône enveloppé par les plans des cercles de courbure, et le rapport d'homothétie sera déterminé, puisqu'il doit être égal au rapport des distances du point O à la tangente au cercle S en M , d'une part, et à la tangente correspondante de S' en M' , d'autre part. De plus, la ligne de seconde courbure passant en M' sera homothétique de celle qui, dans la développable (H) , homothétique de (H') , passe par le point homologue de M' .

Donc, la donnée de la courbe S' permet de construire directement les lignes de seconde courbure qui sont les caractéristiques de la nouvelle surface, et cette donnée correspond à la troisième fonction arbitraire que comporte la solution.

49. Le rayon de la sphère orthogonale O étant sans influence sur le cône (D) et sur l'image sphérique de la surface enveloppe de sphères initiale, il est clair qu'en lui donnant une valeur fixe on ne diminuera pas la généralité de la solution. On pourra dès lors, sans inconvénient, supposer ce rayon nul, auquel cas les sphères enveloppées seront assujetties à passer par un point fixe O . Les enveloppes de sphères passant par un point fixe O sont évidemment les figures inverses des développables. On voit par là, qu'il est possible de déduire des surfaces développables, les surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents d'un cône, en appliquant, aux figures inverses de ces développables, la transformation géométrique qui résulte du théorème précédent.

Nous ferons encore observer, en terminant cet article, que toute surface dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cône, possède une ligne de seconde courbure réelle ou imaginaire, qui est située sur une sphère ayant pour centre le sommet du cône et coupant orthogonalement la surface.

Cette propriété résulte du mode de génération de ces surfaces à l'aide des enveloppes de sphères. On peut aussi s'en rendre compte directement, en observant que les tangentes menées par le sommet O du cône aux lignes de première courbure contenues dans les plans tangents à ce cône, forment un nouveau cône circonscrit à la surface. La ligne de contact de ce cône est une ligne de seconde courbure, puisqu'elle est conjuguée aux

lignes de première courbure, et comme elle est aussi ligne de courbure du cône circonscrit, elle appartient à une sphère de centre O coupant orthogonalement le cône ainsi que la surface.

Dans le cas particulier des surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre, il existe une ligne de seconde courbure située dans un plan perpendiculaire aux génératrices.

III. — *Des surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'une développable quelconque.*

Concevons que l'on associe l'une des surfaces Σ dont les lignes de courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône, avec une surface enveloppe de sphères E de même image sphérique. La résultante de Σ et de E sera une surface ayant la même image sphérique que les proposées, et plus générale que chacune d'elles.

Mais cela ne suffit pas pour être en droit de conclure que les surfaces dont nous cherchons la définition géométrique peuvent être obtenues toutes de cette manière. Il est nécessaire de démontrer la réciproque, que l'on peut énoncer comme il suit :

50. THÉORÈME. — *Toute surface Σ dont les lignes de première courbure sont planes est la résultante, d'une infinité de manières, de deux surfaces ayant la même image sphérique que la proposée, telles, en outre, que l'une des composantes soit une enveloppe de sphères, et que les lignes de première courbure de la seconde composante soient situées dans les plans tangents d'un cône.*

La surface Σ répondant aux conditions de l'énoncé, on peut construire (n° 26) une infinité de surfaces enveloppes de sphères ayant la même image sphérique que Σ , et dont les cercles de courbure soient situés dans les plans tangents de la développable (D) relative à Σ . Soit E' l'une de ces enveloppes de sphères. La surface Σ peut être regardée comme la résultante, par rapport à une origine arbitraire O , de E' et d'une autre surface F , qui sera, à son tour, la résultante de Σ et de la symétrique E'_1 de E' par rapport à O . Or, cette symétrique E'_1 a la même image sphérique que E' et, par suite, que Σ . La surface F a, par conséquent, même image sphérique que Σ et ses lignes de première courbure sont planes.

Les plans de ces lignes s'obtiendront en associant les plans des lignes de courbure correspondantes de Σ et E'_1 , c'est-à-dire des plans symétriques par rapport à l'origine O . Les lignes de courbure de F seront dès lors contenues dans des plans passant par O , ainsi qu'il s'agissait de le démontrer.

51. On obtiendra, par suite, toutes les surfaces à lignes de courbure planes en combinant, par voie d'addition géométrique, une surface F dont les lignes de première courbure sont dans les plans tangents d'un cône, avec une surface enveloppe de sphères E' ayant la même image sphérique. Or, la surface F étant supposée donnée, on peut construire E' . Il suffit, à cet effet, de considérer l'une des surfaces enveloppes de sphères E ayant la même image sphérique que F , et dont les cercles de courbure appartiennent aux plans des lignes de courbure de F . Cela fait, la construction exposée au n° 35 permettra de passer de E à l'une quelconque des enveloppes de sphères ayant la même image sphérique que E et, par suite, que F .

Mais on peut aussi — ce qui est plus simple et n'altère pas la généralité de la solution — se donner E , d'où l'on déduira successivement les surfaces E' et F , que l'on associera ensuite par voie d'addition géométrique. Si maintenant on se reporte au n° 47, on voit aisément que la construction de la surface la plus générale dont les lignes de courbure d'un système sont planes peut être présentée comme il suit :

· Construction de la surface la plus générale à lignes de courbure planes.

1° Soit une développable arbitraire (H), une ligne de courbure T de cette développable et une sphère O . Construisons la surface E , enveloppe d'une sphère touchant H en tous les points de T et coupant orthogonalement la sphère. Les lignes de courbure de E seront toutes connues (n° 45).

2° Construisons aussi une surface enveloppe de sphères E' ayant même image sphérique que E (n° 35).

3° Transportons les plans tangents de E' , parallèlement à eux-mêmes, de distances telles que leurs rapports aux distances du point O aux plans tangents correspondants de E restent constants quand les points de contact de ces derniers parcourent une ligne de seconde

des surfaces enveloppes de sphères ayant la même image sphérique qu'une autre surface de même espèce supposée connue, et dont les sphères enveloppées coupent orthogonalement une sphère fixe.

Comme il est possible, à l'aide d'une simple quadrature, de présenter la construction de cette dernière enveloppe, de telle façon que les lignes de seconde courbure soient mises en évidence, il en sera de même des surfaces qu'on en déduira. C'est ce que nous avons annoncé au n° 34.

Nous rappellerons enfin que l'on peut, sans altérer la généralité de la solution, supposer que les sphères de l'enveloppe initiale passent par un point fixe.

§ 2. — Des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre.

53. Les surfaces dont l'étude fait l'objet de ce paragraphe, présentent, outre l'intérêt qui leur est propre, cette circonstance qu'on peut les construire, d'une manière générale, sans passer par des opérations géométriques nécessitant des quadratures. Leur mode de génération offre la plus grande analogie avec celui qui permet de passer des enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont planes, aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour les deux systèmes. Seulement, dans le cas actuel, on partira des surfaces enveloppes de sphères à lignes de seconde courbure sphériques.

Développables à lignes de courbure sphériques.

54. Il convient donc au début de donner la définition des surfaces développables à lignes de courbure sphériques. Supposons qu'une développable (H) admette une ligne de courbure T appartenant à une sphère de centre O. Cette sphère devant couper, sous un angle constant, la développable proposée, en tous les points de T, les plans tangents de cette développable seront à une distance constante δ du centre O de la sphère, et, par suite, (H) sera circonscrite à la sphère de centre O et de rayon δ .

Réciproquement, concevons une développable (H) circonscrite à une

sphère de centre O , et soit T_0 la courbe de contact. D'abord T_0 sera une ligne de courbure de la développable. Pour avoir une autre ligne de courbure T de (H) , il suffira de porter sur les génératrices de la développable, et à partir des points de T_0 , des segments égaux entre eux, auquel cas, il est visible que T appartiendra aussi à une sphère de centre O . De là résulte cette proposition, d'ailleurs bien connue.

THÉORÈME. — *Les développables à lignes de courbure sphériques sont les développables circonscrites à une sphère. Les sphères qui contiennent les lignes de courbure sont concentriques.*

On peut encore faire la remarque suivante :

Lorsque la développable circonscrite à une surface suivant une ligne de courbure est, en même temps, circonscrite à une sphère, cette ligne de courbure appartient à une sphère concentrique à la première.

Nous retrouverons bientôt ces développables comme cas particulier des surfaces dont les lignes de courbure d'un système appartiennent à des sphères concentriques.

Enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques.

55. Conformément à la méthode indiquée ci-dessus, nous devons d'abord étudier les enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques.

Concevons une surface E , enveloppe de sphères de centres C , et supposons que deux lignes de seconde courbure soient sphériques et situées sur les sphères de centres O et O' . La sphère O coupant E suivant une ligne de courbure, rencontre cette surface sous un angle constant α , en tous les points de cette ligne, et, par suite, elle fera aussi le même angle α avec toutes les sphères enveloppées. Pareillement, la sphère O' coupe toutes les sphères C sous un même angle α' . Les sphères (C) coupant sous des angles constants α et α' les deux sphères O et O' , feront le même angle avec une quelconque des sphères ayant par rapport à O et O' même plan radical. Si l'on considère dès lors une de ces dernières sphères O'' , celle-ci coupera sous un même angle α'' les sphères enveloppées (C) , et, par suite, elle fera l'angle α'' avec l'enveloppe E , en tous les points de son intersection avec elle. Cette intersection sera, par conséquent, une ligne de courbure de E .

Parmi les sphères (O), il en existe deux qui sont touchées par les sphères C. Soient ω et ω' leurs centres qui peuvent être réels ou imaginaires, de même que leurs rayons. Les centres C des sphères enveloppées seront dès lors situés sur une quadrique de révolution autour de la ligne $\omega\omega'$ ou OO' , et les points ω , ω' seront les foyers de la conique méridienne, puisque la différence ou la somme des distances de tout point C aux points ω , ω' est constante et égale à la différence ou à la somme des rayons des sphères ayant ces points pour centres.

Réciproquement, considérons la surface enveloppe d'une sphère dont le centre C parcourt une courbe arbitraire (C) tracée sur une quadrique de révolution, et qui demeure constamment tangente à une sphère fixe ayant pour centre un des foyers ω situés sur cet axe. La sphère mobile sera tangente à une autre sphère ayant pour centre l'autre foyer ω' , et dont le rayon sera déterminé par cette condition que la différence ou la somme des rayons des sphères ω et ω' soient égales à la différence ou à la somme des rayons vecteurs de la conique méridienne, suivant que celle-ci est une hyperbole ou une ellipse.

Puisque la sphère mobile est tangente aux deux sphères fixes ω et ω' , elle coupera sous des angles constants les diverses sphères ayant même plan radical avec ω et ω' . On en déduira, comme précédemment, que les lignes de seconde courbure de l'enveloppe appartiennent à ces dernières sphères. Donc :

THÉORÈME. — 1° *Lorsque deux lignes de seconde courbure d'une enveloppe de sphères sont situées sur deux sphères non concentriques, toutes les lignes de seconde courbure sont sphériques et appartiennent à des sphères ayant même plan radical.*

2° *Une pareille surface est l'enveloppe d'une sphère qui reste tangente à deux sphères fixes, et dont le centre décrit, par suite, une courbe arbitraire tracée sur une quadrique de révolution autour de la ligne des centres des sphères fixes, et admettant ces centres pour foyers. La différence ou la somme des rayons vecteurs de la quadrique sont égales à la différence ou à la somme des rayons des sphères tangentes, suivant que les sphères enveloppées les touchent de la même manière ou de manières différentes.*

Cône enveloppe des plans des cercles de courbure.

56. Parmi les sphères qui contiennent les lignes de seconde courbure, il en est une dont le centre O est toujours réel, et qui coupe orthogonalement les sphères enveloppées. Elle coupe donc orthogonalement la surface enveloppe E en tous les points d'une courbe qui est une ligne de seconde courbure de E . De plus, les sphères enveloppées C coupant orthogonalement la sphère O , il en résulte que les plans des cercles de courbure passent par le centre O . Ainsi :

Les plans des cercles de courbure d'une surface enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques, passent par un point fixe situé sur la droite qui contient les centres des lignes de courbure sphérique.

En d'autres termes, les plans des cercles de courbure d'une pareille surface enveloppent un cône. Cherchons dans lequel cas ce cône devient un cylindre.

Cas où le cône devient un cylindre.

Cela exige que le centre O de la sphère orthogonale s'éloigne à l'infini, et, par suite, que les sphères tangentes ω et ω' soient égales. Dans ce cas, la quadrique se réduit au plan Q , perpendiculaire à la ligne des centres $\omega\omega'$, en son milieu. La courbe, lieu des centres des sphères enveloppées, est une courbe arbitraire (C) tracée dans le plan Q . Enfin, les génératrices du cylindre enveloppe des plans des cercles de courbure, sont parallèles à la droite $\omega\omega'$. La nature de ce cylindre dépend de la forme de la courbe (C) et de la valeur commune des rayons des sphères tangentes. Dans le cas particulier où ces sphères se réduisent à des points, les plans des cercles de courbure passent par la droite $\omega\omega'$, et la surface enveloppe de sphères devient une *girocyclide* pour laquelle on retrouve ainsi la construction donnée au n° 44.

Loi des rayons des sphères enveloppées. — Second mode de génération.

57. Considérons maintenant le plan radical R des sphères O auxquelles appartiennent les cercles de courbure. Ce plan peut être regardé comme une sphère particulière du système, et il coupe, en conséquence, sous un

angle constant, les sphères enveloppées C. La section de l'enveloppe E par le plan R est aussi une ligne de seconde courbure de la surface, et cette ligne est plane.

Mais il y a plus. Le plan R coupant toutes les sphères C sous le même angle, les rayons des sphères C sont proportionnels aux distances de leurs centres à ce plan, et l'on a, pour l'une de ces sphères :

$$r = m\delta,$$

où r désigne le rayon de la sphère C, δ la distance de son centre au plan R, et m un nombre constant pour la surface E.

Il est aisé de voir que le rapport m est égal à l'excentricité de la quadrique de révolution contenant la courbe (C), lieu des centres des sphères enveloppées. Cette remarque permet de donner, pour les surfaces étudiées, le nouveau mode de génération que voici, équivalent au fond à celui du n° 55.

THÉORÈME. — *Soit une quadrique de révolution, une courbe (C) tracée sur la surface, et un plan R perpendiculaire à son axe.*

La surface enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt la courbe (C), de telle sorte que son rayon et la distance de son centre au plan R présentent un rapport constant, égal à l'excentricité de la conique méridienne, aura ses lignes de seconde courbure sphériques. Les sphères contenant ces lignes ont le plan R pour plan radical, et leurs centres sont situés sur l'axe de la quadrique.

En outre, toute surface enveloppe de sphères à lignes de seconde courbure sphériques peut être engendrée de cette manière, en choisissant convenablement la quadrique et la courbe (C).

En répétant le raisonnement du n° 12, on arrive à cette conclusion que le cercle de courbure relatif à une sphère enveloppée est situé dans le plan polaire, par rapport à cette sphère, du point de rencontre du plan fixe R avec la tangente à la courbe (C) au centre C de la sphère considérée.

On déduit encore de là, qu'en désignant par θ l'angle sous lequel le plan d'un cercle de courbure coupe la surface, par α , l'angle que fait ce même plan avec le plan radical R, on a

$$\cos \theta = m \cos \alpha.$$

Ainsi, les plans des cercles de courbure d'une enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques coupent la surface sous des angles dont les cosinus sont proportionnels aux cosinus des angles que forment ces plans avec un plan fixe, qui est le plan radical des sphères contenant les lignes de seconde courbure.

Cas où les sphères sont concentriques.

58. On a supposé, dans ce qui précède, que les centres des sphères contenant deux lignes de seconde courbure sont distincts. Mais les raisonnements s'appliquent aussi au cas particulier où ces sphères sont concentriques. On reconnaît alors que les sphères enveloppées ont le même rayon, et que la courbe (C) appartient à une sphère de centre O. La surface enveloppe est une surface canal telle que la ligne des centres soit sphérique. Les plans des cercles de courbure coupent normalement la surface.

On peut aussi regarder celle-ci comme une surface moulure relative à un cône, le profil de la moulure étant circulaire. Donc :

THÉOREME. — *Lorsque deux lignes de seconde courbure d'une surface enveloppe de sphères appartiennent à des sphères concentriques, toutes les autres lignes de seconde courbure sont situées sur des sphères ayant même centre que les premières, et la surface est une surface moulure relative à un cône arbitraire, le profil de la moulure étant une circonférence de cercle.*

On peut regarder ce cas comme étant la limite du cas général, où l'on suppose que le plan radical R des sphères contenant les lignes de seconde courbure s'éloigne à l'infini.

Surfaces inverses des enveloppes de sphères à lignes
de seconde courbure planes.

59. La surface inverse d'une surface enveloppe de sphères à lignes de seconde courbure planes est visiblement une nouvelle enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques.

La réciproque est vraie. Prenons, en effet, une surface E enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure soient sphériques. Soit R le plan radical des sphères O contenant ces dernières lignes. Les sphères O

coupent R suivant un même cercle (A). Prenons un point A de (A) pour centre d'inversion. La surface E sera remplacée par une nouvelle enveloppe de sphères E_1 dont les lignes de seconde courbure seront situées sur les transformées des sphères O, c'est-à-dire sur des plans passant par la droite L dans laquelle s'est changée le cercle (A). Ainsi, la surface E est la figure inverse d'une enveloppe de sphères E_1 dont les lignes de seconde courbure sont planes.

Toutefois, cette conclusion a lieu seulement quand le cercle (A) est réel, car, dans le cas où les sphères O ne coupent pas leur plan radical, le centre d'inversion est imaginaire. On peut éviter cet inconvénient comme il suit :

Lorsque les sphères O ne coupent pas leur plan radical, le système de ces sphères admet deux sphères de rayon nul. Soit B, l'une d'elles. En prenant le point B pour centre d'inversion, on transforme les sphères O en sphères concentriques, et, par suite, la surface E en une surface enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont situées sur des sphères concentriques.

THÉORÈME. — En résumé : *Les surfaces enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques s'obtiennent en appliquant la transformation par rayons vecteurs réciproques aux surfaces enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont planes, et aux surfaces-moulures par rapport à un cône, telles que le profil de la moulure soit circulaire.*

La méthode d'inversion fournit ainsi un nouveau mode de génération des surfaces que nous étudions.

60. Les surfaces enveloppes de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques présentent cette particularité, que les plans des cercles de courbure passent par un point fixe situé à distance finie ou infinie, et ce point est le centre d'une sphère orthogonale à la surface, en tous les points de son intersection avec elle.

On a vu, de plus, que lorsqu'une enveloppe de sphères possède deux lignes de seconde courbure sphériques, toutes les autres le sont. Il en résulte la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Lorsque les cercles de courbure d'une enveloppe de sphères sont contenus dans les plans tangents d'un cône, toutes les lignes de seconde courbure seront sphériques, si l'une d'elles appartient*

à une sphère distincte de celle qui a pour centre le sommet du cône et coupe orthogonalement la surface.

Cette remarque conduit visiblement à un autre mode de génération qui nous paraît préférable, dans certains cas, à ceux que nous avons déjà donnés, et qui est le suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface enveloppe de sphères dont les lignes de seconde courbure sont sphériques, est l'enveloppe d'une sphère assujettie à couper orthogonalement une sphère fixe O, et à toucher une développable à lignes de courbure sphériques, en tous les points d'une de ces lignes de courbure n'appartenant pas à la sphère O.*

Les lignes de seconde courbure de la surface enveloppe sont situées sur les sphères ayant même plan radical avec les deux précédentes.

La définition des surfaces enveloppe de sphères de cette espèce comporte une seule fonction arbitraire.

Surfaces générales.

61. Nous pouvons maintenant aborder le cas général. La première idée qui s'offre à l'esprit, est que la développable enveloppe des plans des lignes de première courbure d'une surface à lignes de seconde courbure sphériques ne peut être quelconque, puisque, dans le cas des enveloppes de sphères, cette développable est un cône. On sait, d'après les résultats obtenus par MM. Serret et O. Bonnet, qu'il en est de même pour les surfaces satisfaisant à cette double condition, et c'est ce que nous allons établir géométriquement, en faisant usage des considérations précédentes¹. La propriété dont nous venons de parler peut s'énoncer comme il suit :

L'enveloppe des plans des lignes de première courbure est un cône.

THÉORÈME. — *Lorsque les lignes de courbure d'une surface Σ sont planes pour le premier système, et sphériques, pour le second :*

1° *Les plans des lignes de première courbure passent par un point fixe O situé à distance finie ou infinie ;*

2° *Les cosinus des angles que forment ces plans avec un certain plan*

1. Voir aussi le travail de M. A. Picard, l. c., pp. 16 à 54.

fixe R, sont proportionnels aux cosinus des angles que forment ces mêmes plans avec la surface, en tous les points de la ligne de courbure contenue dans chacun d'eux;

3° Les sphères auxquelles appartiennent les lignes de seconde courbure sont concentriques ou, dans le cas contraire, leurs centres sont situés sur une droite passant par le point O et perpendiculaire au plan R.

Supposons, en premier lieu, que parmi les sphères contenant les lignes de seconde courbure de Σ , il en existe une coupant orthogonalement la surface et dont le centre soit le point O. Construisons, d'après le lemme du n° 26, la surface E enveloppe de sphères, ayant la même image sphérique que Σ , touchant cette dernière surface en tous les points de la ligne de courbure T contenue sur la sphère O, et dont les plans des cercles de courbure se confondent avec les plans des lignes de première courbure de Σ . La sphère O coupera orthogonalement E en tous les points de T et, par suite, elle sera orthogonale à toutes les sphères dont E est l'enveloppe. Il en résulte que les plans des cercles de courbure de E ou, ce qui revient au même, les plans des lignes de première courbure de Σ , passeront par le point O. Ainsi, la développable (D) relative à Σ est un cône, qui devient un cylindre dans le cas où le point O disparaît à l'infini, ce qui arrive quand la sphère O se réduit à un plan. Cela posé, si nous considérons les développables (H) circonscrites à Σ et E suivant les lignes de seconde courbure correspondantes, ces développables sont homothétiques (n° 47) deux à deux par rapport à O et, comme pour Σ , elles sont circonscrites à des sphères, puisque les lignes de seconde courbure de Σ sont sphériques, les développables relatives à E seront pareillement circonscrites à des sphères, d'où il résulte que toutes les lignes de seconde courbure de E sont sphériques.

On en conclut, d'après ce qui a été vu précédemment, que les sphères contenant les lignes de seconde courbure de E sont concentriques, ou bien que leurs centres sont situés sur une droite contenant le point O. Il en sera donc de même des sphères qui passent par les lignes de seconde courbure de Σ . Enfin, la loi des cosinus ayant lieu pour E, sera également vérifiée pour Σ , puisque les plans des lignes de première courbure de Σ et des cercles de courbure correspondants de E sont les mêmes, et coupent les deux surfaces sous les mêmes angles.

Il reste maintenant à considérer le cas où il n'existe aucune sphère coupant Σ orthogonalement. Prenons une ligne de seconde courbure T quelconque, et soit O le centre de la sphère à laquelle elle appartient. Concevons la normale à Σ en un point quelconque M de T , et du point O abaissons la perpendiculaire OM' sur cette normale. Pour tous les points de la ligne T la distance MM' est constante, car on a :

$$\overline{MM'} = R \cos \lambda$$

R étant le rayon de la sphère O , et λ désignant l'angle constant sous lequel elle coupe la surface.

Considérons maintenant la surface Σ' qu'on déduit de Σ en diminuant ses normales de la quantité MM' . Cette surface sera une surface parallèle à Σ . Ses lignes de première courbure seront dans des plans parallèles aux plans des lignes de première courbure de Σ , et les plans correspondants couperont les surfaces sous les mêmes angles. Les lignes de seconde courbure de Σ' appartiendront à des sphères concentriques aux sphères qui contiennent les lignes de seconde courbure correspondantes de Σ . Mais, parmi les sphères contenant les lignes de seconde courbure de Σ' , il en existe une qui coupe orthogonalement cette surface, savoir celle qui contient la ligne T' lieu des points M' . Par suite, la surface Σ' possède les propriétés indiquées par l'énoncé, et les deux dernières de ces propriétés conviendront aussi à Σ . Il reste ainsi à prouver que les plans des lignes de première courbure de Σ passent par un point fixe.

Or, les plans des lignes de courbure de Σ' passent par O , et les centres des sphères relatives aux lignes de seconde courbure de cette surface sont sur une droite L passant en O et perpendiculaire à R . Soit P le plan d'une ligne de première courbure quelconque de Σ , et P' le plan de la ligne correspondante Σ' . Si l'on désigne par θ l'angle sous lequel ces plans coupent les deux surfaces, la distance δ de ces plans sera (puisque les normales de Σ ont été diminuées de MM')

$$\delta = \overline{MM'} \cos \theta = R \cos \lambda \cos \theta$$

Donc, Ω étant le point où P rencontre L ,

$$O\Omega = \frac{\delta}{\cos \alpha} = R \cos \lambda \frac{\cos \theta}{\cos \alpha},$$

α étant l'angle que forment les plans P et P' avec R. Or, le rapport $\frac{\cos \theta}{\cos \alpha}$ étant constant pour toutes les lignes de première courbure, il doit en être de même de la distance O Ω . Le point Ω est donc fixe, et tous les plans P passent par ce point fixe Ω .

Ainsi, toutes les parties de la proposition sont démontrées. On peut faire encore la remarque suivante : Posons

$$\frac{\cos \theta}{\cos \alpha} = m,$$

m désignant une constante, d'après ce qui vient d'être dit. Il viendra :

$$O\Omega = m (R \cos \lambda)$$

Donc :

THÉORÈME. — *Lorsque les lignes de seconde courbure d'une surface sont sphériques, auquel cas les plans des lignes de première courbure passent par un point fixe Ω , il existe un rapport constant entre la distance, au point Ω , du centre de la sphère contenant une ligne quelconque T de seconde courbure, et la longueur de la corde que les normales à la surface, en tous les points de T, interceptent dans cette sphère.*

Conséquences du théorème fondamental.

62. La démonstration que nous venons de présenter conduit encore à quelques conséquences utiles.

1° Soient deux surfaces Σ et Σ' dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un même cône, et qui possèdent la même image sphérique. Si les lignes de seconde courbure sont sphériques pour l'une des surfaces, elles le seront pour l'autre.

Car les développables circonscrites à Σ et Σ' le long des lignes de seconde courbure correspondantes sont homothétiques (n° 47) et, comme elles sont circonscrites à des sphères pour la surface Σ dont les lignes

de courbure considérées sont sphériques, elles sont pareillement circonscrites à des sphères pour la seconde surface, de telle sorte que les lignes de seconde courbure de celle-ci seront encore sphériques.

2° *Lorsque les lignes de première courbure d'une surface Σ sont situées dans les plans tangents d'un cône, toutes les lignes de seconde courbure seront sphériques, si l'une d'entre elles T appartient à une sphère distincte de la sphère ayant pour centre le sommet du cône, et coupant orthogonalement la surface.*

Construisons, en effet, l'enveloppe de sphères E dont les lignes de première courbure soient situées dans les mêmes plans que celles de la proposée, ayant la même image sphérique que Σ et touchant cette surface suivant T. Cette enveloppe de sphères E admettra une ligne de seconde courbure T, appartenant à une sphère distincte de celle qui est située sur la sphère orthogonale, ayant pour centre le sommet du cône. Dès lors, toutes les lignes de seconde courbure E seront sphériques (n° 60), et il en sera de même des lignes correspondantes de Σ , d'après ce qui précède.

3° *Lorsque les lignes de première courbure d'une surface Σ sont planes et qu'une ligne T de seconde courbure appartient à une sphère O coupant orthogonalement la surface, en tous les points de T, les plans des lignes de première courbure passent par le point O. En outre, si la surface possède une autre ligne de seconde courbure qui soit sphérique, toutes les lignes de seconde courbure seront pareillement sphériques.*

La première partie a été établie dans la démonstration du théorème fondamental, et la seconde résulte de ce qui précède.

4° *Plus généralement, lorsque les lignes de première courbure d'une surface sont planes et que deux lignes de seconde courbure sont sphériques, toutes les lignes de seconde courbure sont sphériques.*

En répétant une construction déjà faite, on pourra former une surface Σ' parallèle à la proposée Σ , qui admettra deux lignes de courbure sphériques, mais dont l'une sera située sur une sphère orthogonale à la surface Σ' . La surface Σ' a donc toutes ses lignes de courbure sphériques, et il en est de même de Σ , qui est une surface parallèle à Σ' .

Construction de la surface la plus générale, dont les lignes de courbure soient planes pour un système, et sphériques pour l'autre

63. On construira toutes les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques, en s'appuyant sur ce que les enveloppes de sphères qui leur correspondent satisfont aux mêmes conditions.

En appliquant, aux enveloppes de sphères étudiées au commencement de ce paragraphe, la construction du n° 47, on obtiendra toutes les surfaces cherchées, dont le mode de génération sera donné par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre, est l'enveloppe des plans parallèles aux plans tangents d'une enveloppe de sphères de même espèce, tels que le rapport des distances du sommet du cône enveloppé par les plans des cercles de courbure, aux plans tangents parallèles des deux surfaces, conserve une valeur constante, quand le point de contact du plan tangent de l'enveloppe de sphères parcourt une ligne de seconde courbure de celle-ci, ce même rapport variant suivant une loi continue quelconque, quand on passe d'une de ces lignes à la ligne infiniment voisine.*

Les deux surfaces ont la même image sphérique et, par suite, leurs lignes de courbure se correspondent dans les deux systèmes.

REMARQUES. — I. La définition de la surface la plus générale à lignes de courbure planes et sphériques, comporte deux fonctions arbitraires relatives, la première à l'enveloppe des sphères initiale, et la seconde, à la variation du rapport dont il est question ci-dessus. L'interprétation géométrique de cette dernière a été déjà donnée dans le cas général (n° 48). Elle correspond à une courbe choisie à volonté dans le plan d'un cercle de courbure de la surface enveloppe de sphères initiale, et qui sera regardée comme la ligne de courbure de la surface demandée, correspondante au cercle considéré (n° 48).

II. Les constructions qui permettent d'obtenir ces surfaces sont entièrement géométriques et n'exigent aucune intégration. Nous avons déjà constaté cette particularité pour les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, surfaces qui sont elles-mêmes un cas particulier des surfaces étudiées dans ce paragraphe.

III. Les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système, et sphériques dans l'autre, se partagent en deux classes, suivant que les sphères contenant les lignes de seconde courbure sont concentriques ou n'ont pas les mêmes centres. On les déduit, par le même procédé, des enveloppes de sphères à lignes de seconde courbure sphériques.

Il serait très aisé de démontrer que, dans le cas où les lignes de seconde courbure sont situées sur des sphères concentriques, la surface est une surface moulure par rapport à un cône, en d'autres termes que les plans des lignes de courbure planes sont orthogonaux à la surface (n° 58).

Cas particulier où la développable (D) est un cylindre.

64. Comme cas particulier, on doit signaler les surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre, et dont les lignes de seconde courbure sont sphériques. On les déduit des enveloppes de sphères de même espèce, par le procédé du n° 41.

Mais ces surfaces particulières sont susceptibles d'un autre mode de génération. Nous allons démontrer, conformément à un résultat établi par MM. Serret et O. Bonnet, qu'elles ne sont pas distinctes des surfaces de Joachimstal ou des surfaces qui leur sont parallèles.

Soit, en effet, Σ une surface dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre (D), et dont les lignes de seconde courbure sont sphériques. Soit T une ligne de seconde courbure de Σ contenue sur une sphère de centre O. Construisons, comme nous l'avons expliqué, une surface Σ' parallèle à Σ et telle que la ligne T', correspondante à T, soit située sur une sphère, dont le centre sera toujours le point O, et coupant Σ' orthogonalement. Les plans des lignes de première courbure de Σ' passeront par le point O et, comme ils sont parallèles aux génératrices de (D), ces plans contiendront une droite fixe, savoir la parallèle menée à ces génératrices par le point O. Donc, Σ' est une surface de Joachimstal. Comme la réciproque est évidente, on peut dire que :

Les surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre, et dont les lignes de seconde

courbure sont sphériques, ne sont autres que les surfaces de JOACHIMSTAL ou les surfaces qui leur sont parallèles.

Images sphériques.

65. Considérons une ligne de seconde courbure T appartenant à une sphère qui coupe obliquement la surface Σ . Soit O le centre de la sphère, et $2c$, la longueur commune des cordes que les normales à la surface, en tous les points de T , interceptent dans cette sphère. Nous avons vu que la distance, au point O , du plan d'une ligne de première courbure est égale à $c \cos \theta$, θ désignant l'angle sous lequel ce plan coupe Σ , puisque si l'on diminue toutes les normales de la longueur c , les plans des lignes de première courbure de la nouvelle surface, parallèle à la première, passent par O .

Nous ferons l'image de Σ sur la sphère, ayant pour centre le point O et c pour rayon. On voit alors que le plan d'une ligne de première courbure de Σ fait, avec cette sphère, le même angle θ qu'avec la surface, et, par suite, *que l'image sphérique de toute ligne de première courbure de la surface proposée est un cercle situé dans le plan de cette ligne.*

On déduit de là les conséquences suivantes :

1° *Lorsque les lignes de courbure d'une surface sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre, les cercles de la sphère qui forment l'image des lignes de première courbure sont contenus dans des plans passant par un point fixe situé à distance finie ou infinie.*

On est ainsi conduit à étudier les réseaux sphériques orthogonaux, tels que les courbes d'une famille soient des cercles dont les plans passent par un même point Ω .

Les cercles de cette famille coupent orthogonalement un cercle fixe réel ou imaginaire, savoir le cercle situé dans le plan polaire du point Ω , par rapport à la sphère. Ce cercle, rencontrant normalement en deux points chacun des cercles du réseau, on est certain d'avance que, si l'on connaît une autre trajectoire orthogonale, on les connaîtra toutes. Effectivement, le théorème démontré au n° 45 s'applique à ce cas, puisque la sphère peut être regardée comme une surface dont les lignes de courbure d'une famille sont situées dans des plans passant par le point fixe Ω . La construction générale de ces réseaux est donc la suivante :

Tracez sur une sphère une courbe quelconque τ , ainsi que les cercles dont les plans passent par un point fixe Ω et par les génératrices de la développable circonscrite à la sphère suivant la ligne τ . Vous obtiendrez ainsi les cercles formant la première famille du réseau cherché, ainsi qu'une de leurs trajectoires orthogonales τ . L'application du théorème de collinéation (n° 45) fournira ensuite toutes les courbes de la seconde famille.

2° Puisque les plans des lignes de première courbure de Σ se confondent avec les plans des cercles qui forment l'image sphérique de ces lignes, sur la sphère que nous avons choisie, et que, d'autre part, cette sphère peut être regardée comme une surface ayant la même image sphérique que Σ , il en résulte que l'on pourra passer, de la sphère O à Σ , en appliquant la construction du n° 47. D'après cela, le rapport des distances, au point Ω , des plans tangents correspondants de la sphère et de Σ , conserve une valeur constante quand le point de contact du plan tangent de la sphère décrit une trajectoire orthogonale de la famille des cercles.

Réciproquement, supposons que l'on trace sur une sphère un réseau orthogonal tel que les courbes d'une famille soient des cercles situés dans des plans passant par un point fixe Ω . Transportons ensuite un plan tangent quelconque de la sphère, parallèlement à lui-même, de façon que le rapport qui existe entre les distances du point Ω aux deux positions de ce plan conserve une valeur constante quand le point de contact du plan tangent à la sphère décrit une trajectoire orthogonale de la famille des cercles et varie, d'après une loi continue quelconque, quand on passe d'une trajectoire à la suivante. Soit Σ la surface enveloppe des positions nouvelles des plans tangents de la sphère proposée. On sait que les lignes de première courbure de Σ seront contenues dans les plans des cercles de courbure de la surface initiale, c'est-à-dire dans les plans des cercles du réseau sphérique qui passent par Ω . De plus, la surface Σ aura la même image sphérique que la sphère et, en vertu d'une proposition énoncée au n° 62, ses lignes de seconde courbure seront sphériques, comme celles de la sphère elle-même.

Nouveau mode de génération des surfaces à lignes de courbure planes pour un système, et sphériques pour l'autre.

66. La considération de l'image sphérique conduit ainsi à un autre mode de génération pour les surfaces dont nous nous occupons. Ces surfaces peuvent se déduire de la sphère au moyen du théorème suivant analogue à celui du n° 32.

THÉORÈME. — *Si l'on trace sur une sphère une famille de cercles coupant orthogonalement une courbe arbitraire τ de cette sphère et dont les plans passent par un point fixe Ω :*

1° *Les trajectoires orthogonales de ces cercles pourront être construites à l'aide du théorème de collinéation du n° 45 ;*

2° *En appliquant à la sphère la construction du n° 47, on obtiendra la surface la plus générale dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre. A cet effet, on transportera les plans tangents à la sphère, parallèlement à eux-mêmes, de façon que le rapport des distances du point Ω aux deux positions d'un même plan tangent reste constant quand le point de contact du plan tangent de la sphère décrit une trajectoire orthogonale de la famille des cercles et varie, d'après une loi continue quelconque, quand on passe de l'une de ces trajectoires à la suivante. L'enveloppe des positions nouvelles de ces plans tangents sera la surface demandée, qui aura pour image sphérique le réseau primitivement tracé sur la sphère.*

Cas particulier.

67. Dans le cas particulier où le point Ω est rejeté à l'infini, on obtient les surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre, les lignes de seconde courbure étant sphériques. Il faut alors modifier la construction précédente, d'après ce qui a été dit au n° 41. On transportera les plans tangents à la sphère, parallèlement à eux-mêmes et dans la direction des génératrices du cylindre, de telle sorte que la grandeur de la translation conserve une valeur constante quand le point de contact du plan tangent à la sphère décrit une trajectoire orthogonale de la famille des cercles et

varie, d'après une loi quelconque, quand on passe d'une de ces trajectoires à la suivante.

Toutefois, on a supposé, dans ce qui précède, qu'il existe une ligne de seconde courbure appartenant à une sphère coupant obliquement la surface. Il reste donc à considérer le cas où les sphères, auxquelles appartiennent les lignes de seconde courbure de Σ , coupent toutes la surface à angles droits. Je dis que, dans ce cas, la surface *est une surface de Joachimstal*.

On sait d'abord que les surfaces de Joachimstal possèdent la propriété dont nous venons de parler. Réciproquement, soit Σ une surface dont les lignes de seconde courbure appartiennent à des sphères orthogonales à la surface et dont les lignes de première courbure sont planes. D'après ce qu'on a vu (n° 61), les plans des lignes de courbure du premier système doivent passer par le centre de l'une quelconque de ces sphères et, dès lors, tous ces centres sont situés sur la droite d'intersection des plans des deux lignes de première courbure quelconque. Donc, les plans de toutes les lignes de première courbure passent par une droite fixe, et Σ est une surface de Joachimstal.

La construction générale ne peut convenir à ce cas, puisque la sphère sur laquelle on ferait l'image de la surface se réduirait à un point. On emploiera donc le mode de génération donné au n° 44, ou bien encore on pourra profiter de la remarque faite au n° 64, en vertu de laquelle les surfaces de Joachimstal sont parallèles aux surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre, les lignes de seconde courbure étant sphériques.

Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont sphériques.

68. Les propriétés exposées jusqu'ici conduisent à cette conclusion que l'on peut donner, sans avoir recours à aucune intégration, la construction générale des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, ainsi que des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre. La solution générale comporte deux fonctions arbitraires.

Il en est de même des surfaces dont les lignes de courbure sont sphériques pour les deux systèmes. MM. Serret et O. Bonnet ont fait voir que

l'on obtient ces dernières surfaces, en appliquant la transformation par rayons vecteurs réciproques aux surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, et à celles dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques pour l'autre, chacune des surfaces transformées étant, en outre, accompagnée des surfaces qui lui sont parallèles.

Il n'entre pas dans notre plan de donner la démonstration de cette propriété. Nous renverrons au Mémoire déjà cité de M. A. Picart, dans lequel le théorème dont nous venons de parler est établi avec toute la simplicité et la rigueur désirables. (*L. c.*, pp. 55 à 67).

CHAPITRE III

DES RÉSEAUX PLANS QUI CORRESPONDENT AUX SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE D'UN SYSTÈME SONT PLANES

§ 1. — Théorème fondamental et définition des réseaux (S, T).

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, il est possible de ramener la recherche des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système, à un problème de géométrie plane, au moyen d'un théorème dû à M. A. RIBAUCCOUR. (Voir *Nouvelle correspondance mathématique*, 1879 et 1880.)

Cette proposition, remarquable à la fois par sa grande généralité et les nombreuses conséquences que l'on en déduit, peut être énoncée de la manière suivante :

69. THÉORÈME. — *Si des courbes tracées dans les plans tangents d'une développable sont lignes de courbure de la surface qu'elles engendrent :*

1° *Elles conservent la même propriété quand on déforme arbitrairement la développable, par des rotations autour des génératrices, de façon que chaque plan tangent entraîne la courbe qui s'y trouve tracée ;*

2° *Les lignes de seconde courbure de la surface primitive correspondent, point par point, aux lignes de seconde courbure de la nouvelle surface.*

Soit (D) la développable donnée, dans les plans tangents de laquelle sont tracés des courbes S formant un ensemble continu, et qui constituent les lignes de première courbure de la surface Σ , lieu de ces courbes, les lignes de seconde courbure étant toujours désignées par T. Déformons (D), par des rotations infiniment petites autour des génératrices,

et supposons que chaque plan tangent entraîne la ligne S qu'il contient, de telle sorte que cette courbe reste invariablement liée à la génératrice de contact. Après la déformation, les lignes S auront pris de nouvelles positions que nous désignerons par S' , et un point M d'une certaine ligne S sera venu occuper la position correspondante M' sur la ligne S' correspondant à S . Il s'agit de prouver que les lignes S' seront encore les lignes de première courbure de la nouvelle surface Σ' et que si, dans la première position, une ligne T de seconde courbure était le lieu de certains points M pris sur les diverses lignes S , la courbe T' qui réunit les points correspondants M' des courbes S' sera une ligne de seconde courbure de Σ' .

Rappelons, à cet effet, que l'arête de rebroussement G de toute développable (H) circonscrite à Σ , suivant une ligne T , est située sur (D) (n° 36).

Après la déformation dont il est question ci-dessus, la courbe G se transformera en une courbe G' tracée sur la nouvelle développable (D') ; (H) se changera en une nouvelle développable (H') ayant G' pour arête de rebroussement, et dont les génératrices toucheront les courbes S' aux points qui correspondent aux points de contact des génératrices de H avec les courbes S . Par suite, la développable (H') sera circonscrite à la nouvelle surface Σ' , et sa courbe de contact T' correspondra, point par point, à T . La courbe T étant l'une quelconque des lignes de seconde courbure de Σ , il résulte de là que, sur la surface Σ' , le réseau formé, pour une famille, par les lignes S' et, pour l'autre famille, par les lignes T' , est un réseau conjugué, puisque les génératrices de la développable circonscrite à une ligne T' quelconque sont tangentes aux lignes S' . Il reste donc à prouver que ce réseau est en même temps orthogonal, afin d'établir la proposition dans son ensemble.

Or, soient M et M_1 les points d'intersection d'une ligne T avec deux lignes de première courbure infiniment voisines S et S_1 , et D , la génératrice de contact du plan de S avec (D) . L'élément MM_1 de la ligne T est perpendiculaire à la tangente en M à S . Si l'on fait tourner la figure autour de D , d'un angle infiniment petit, de manière que S reste immobile, le point M_1 de S_1 décrit un élément $M_1 M'_1$ perpendiculaire au plan de S et, par suite, le nouvel élément MM'_1 est encore perpendiculaire à la tangente en M à S . Donc, après les rotations qui produisent la seconde forme de la développable, les éléments des courbes S' et T' sont encore

orthogonaux. Le réseau formé par ces courbes sur Σ' n'est donc autre que le réseau des lignes de courbure de cette surface, puisqu'il est à la fois orthogonal et conjugué. C. Q. F. D.

Ce théorème donne évidemment le moyen, connaissant une surface dont les lignes de première courbure sont planes, de former une infinité d'autres surfaces dont les lignes de première courbure soient identiques à celles de la proposée.

70. Ceci posé, considérons une surface Σ dont les lignes de première courbure soient planes. Prenons la développable (D) enveloppe des plans de ces courbes, et *appliquons cette développable sur un plan*, en la déformant par des rotations infiniment petites autour des génératrices, chaque plan tangent entraînant la courbe correspondante, ainsi que nous l'avons expliqué. Nous obtiendrons alors, sur le plan du rabattement, la figure suivante.

En premier lieu, nous aurons une courbe A transformée de l'arête de (D) et dont les tangentes, que nous désignerons encore par D, seront les positions nouvelles des génératrices de la développable primitive. Nous formerons, en second lieu, un réseau orthogonal composé de courbes, que nous désignerons toujours par S et T, les premières étant les nouvelles positions des lignes de première courbure auxquelles elles sont identiques, et les autres correspondant point par point aux lignes de seconde courbure de Σ . Chaque courbe S correspond à une droite D, savoir à la nouvelle position de la génératrice de contact du plan tangent dans lequel la ligne de courbure était primitivement située.

Il s'agit d'étudier les propriétés caractéristiques de ce réseau orthogonal (S,T).

Reprenons, à cet effet, les développables (H) circonscrites à Σ , suivant les lignes T, et dont les arêtes de rebroussement G sont des courbes tracées sur (D). Quand la développable est déroulée sur le plan, les courbes G sont devenues les développées des nouvelles lignes T, et il en résulte, par conséquent, que le centre de courbure d'une ligne T, au point où elle rencontre une ligne S, est sur la droite qui correspond à S. Le réseau (S,T) possède donc la propriété suivante :

Les centres de courbure de toutes les trajectoires orthogonales T aux points où elles rencontrent normalement une même ligne S, sont situés sur une même droite, qui est la droite D correspondant à S.

Je dis maintenant que cette propriété est caractéristique. Supposons que l'on ait tracé sur un plan un réseau formé, pour une famille, par des courbes S , pour l'autre famille, par leurs trajectoires orthogonales T , et que ce réseau soit tel que les centres de courbure des lignes T , aux points où elles coupent normalement une même ligne S quelconque, soient sur une droite D . Considérons le système formé par les droites D qui correspondent ainsi à chacune des lignes S , et, par des rotations successives infiniment petites autour de chacune de ces droites, formons une développable (D) dans les plans tangents de laquelle les courbes S soient entraînées, de façon que chacune d'elles, invariablement liée à la droite D correspondante, vienne se placer dans le plan tangent de la développable, suivant la nouvelle position de cette droite. Il s'agit de démontrer que, dans leurs nouvelles positions S' , les lignes S constitueront les lignes de première courbure de la surface Σ' ainsi engendrée, et que les lignes de seconde courbure T' de Σ' , correspondent, point par point, aux lignes T du réseau plan.

Il suffit, pour cela, de faire voir que le réseau formé, sur Σ' , par les lignes S' et T' est à la fois orthogonal et conjugué. On y parviendra en répétant le raisonnement dont nous avons fait usage dans la démonstration du théorème fondamental. Nous énoncerons, en conséquence, la proposition suivante.

THÉORÈME. — *Pour que des courbes S tracées dans un plan où elles forment un système continu, puissent devenir lignes de courbure de la surface qu'elles engendrent quand on change le plan en surface développable, il faut et il suffit que les centres de courbure de leurs trajectoires orthogonales, aux points où elles coupent normalement une même ligne S quelconque, soient situées sur une droite D .*

Si cette condition est remplie, les droites D sont les rabattements des génératrices de la développable, et, quelle que soit la loi continue d'après laquelle on forme cette développable au moyen des droites D , chacune d'elles entraînant la courbe correspondante S dans le plan tangent à la développable suivant la génératrice qu'elle produit :

- 1° *Les positions nouvelles des courbes S seront les lignes de première courbure de la surface qu'elles engendrent;*
- 2° *Les lignes de seconde courbure correspondront point par point aux trajectoires orthogonales T .*

Ce théorème définit complètement les réseaux plans qui correspondent aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système. Nous désignerons ces réseaux par la notation (S, T) , de telle sorte que les lignes S soient les lignes du réseau identiques aux lignes de première courbure, et T leurs trajectoires orthogonales.

71. Nous donnerons encore une autre définition des réseaux (S, T) . Cette définition, équivalente à la première, mais d'une application plus simple, nous conduira aussi à de nouvelles conséquences.

Remarquons, en premier lieu, que la condition précédemment énoncée revient à celle-ci.

Les tangentes à deux lignes infiniment voisines S et S_1 , aux points M et M_1 où elles sont rencontrées normalement par toute trajectoire T , doivent se couper sur la droite D qui correspond à S . D'autre part, on peut regarder S_1 comme l'enveloppe d'un cercle dont le centre M parcourt la ligne S , et dont le rayon infiniment petit MM_1 est égal à l'arc de la trajectoire T compris entre S et S_1 .

Or, si de tous les points d'une ligne S pris pour centres, on décrit des cercles, la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes aux points correspondants de la ligne S et de l'enveloppe se coupent sur une droite fixe D , est que les rayons soient proportionnels aux distances de leurs centres à la droite (n° 8). Appliquant cette proposition aux lignes infiniment voisines S et S_1 d'un réseau (S, T) , nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes aux courbes S et S_1 , dans les points où elles sont rencontrées normalement par une même ligne T , se coupent sur la droite D , est que l'arc de T compris entre S et S_1 , soit proportionnel à la distance de son extrémité, située sur S , à cette droite D .

La propriété caractéristique (n° 70) des réseaux (S, T) peut donc être remplacée par la suivante :

Les arcs infiniment petits des trajectoires T , compris entre une courbe S quelconque et la courbe infiniment voisine, doivent être proportionnels aux distances de leurs extrémités, prises sur S , à la droite D correspondant à S .

Le coefficient de proportionnalité, constant pour une courbe S , varie quand on passe de l'une de ces courbes à la courbe infiniment voisine. Il dépend uniquement du paramètre qui définit individuellement les droites D

et, avec elles, les courbes S qui leur correspondent. Si l'on désigne par a le paramètre dont les valeurs définissent les droites D, de telle sorte que la droite D', infiniment voisine d'une droite D, soit fournie par la valeur $a + da$, la propriété précédente est exprimée par l'équation

$$(1) \quad ds = Y \cdot H da,$$

où ds désigne l'arc la trajectoire orthogonale compris entre un point M de la courbe S relative à la valeur a et la courbe S' infiniment voisine; Y la distance du point M à la droite D qui correspond à S; et Hda le coefficient de proportionnalité qui est un infiniment petit dépendant uniquement de a et da , en sorte que sa valeur peut être mise sous cette forme, H désignant une fonction de la seule variable a .

72. La recherche des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes, est ainsi ramenée à la recherche d'un réseau orthogonal tracé dans un plan, et dont les éléments vérifient l'équation fondamentale (1). Une fois ce réseau obtenu, il restera à former une développable, par des rotations successives infiniment petites autour des droites D, ces droites entraînant avec elles, dans les plans tangents de la développable, les courbes S qui leur correspondent respectivement. Or, ce qui précède, permet de trouver le nombre des fonctions arbitraires que comporte la solution, dans le cas le plus général.

On peut d'abord prendre arbitrairement la courbe A, enveloppe des droites D. Cette enveloppe correspond à une fonction arbitraire du paramètre a . On peut aussi choisir à volonté une première courbe S que l'on fera correspondre à l'une quelconque des droites D, c'est-à-dire à une valeur particulière de a . Cette donnée introduit une nouvelle fonction arbitraire d'une autre variable b , différente de a et indépendante de celle-ci. Le coefficient de proportionnalité ou, ce qui revient au même, la quantité H, est une fonction arbitraire de a . Les trois fonctions dont nous parlons étant ainsi fixées, je dis que le réseau plan est entièrement déterminé.

On passera, en effet, de la courbe S à la courbe infiniment voisine, en portant sur les normales de la première, et, à partir de leurs pieds sur S, des longueurs égales à $Y \cdot Hda$. On passera, de même, de la courbe S' à la courbe suivante S'', après avoir changé a en $a + da$ dans l'expres-

sion de la longueur portée sur les normales, et on construira ainsi, de proche en proche, les courbes S du réseau demandé, qui est, par suite, le seul qu'on puisse former avec les données que l'on a choisies.

Il résulte de là que le réseau (S,T) le plus général dépend de trois fonctions arbitraires de deux variables indépendantes. Pour en déduire une surface à lignes de courbure planes, il reste encore à reconstituer la développable (D) dont on connaît les rabattements des génératrices, ce qui introduit une quatrième fonction arbitraire dépendant uniquement de la première variable a .

En résumé, la construction de la surface la plus générale dont les lignes de première courbure sont planes, comporte quatre fonctions arbitraires. C'est le résultat que nous avons obtenu dans le chapitre précédent.

73. Une conclusion intéressante résulte de la construction infinitésimale qui permet de passer de l'une des courbes S du réseau à toutes les autres.

Il est clair que si la courbe S est algébrique, il en sera de même de la courbe infiniment voisine et de toutes les courbes S. Donc :

Lorsque les lignes de première courbure d'une surface sont planes, toutes ces lignes seront algébriques si l'une d'entre elles est elle-même algébrique.

74. On sait que lorsqu'une ligne de courbure est plane, son plan coupe la surface sous le même angle, en tous les points de cette ligne. Il est facile, en s'appuyant sur ce qui précède, de vérifier cette proposition et de trouver, en même temps, la valeur de cet angle, en fonction de H et de l'angle de contingence de la développable (D).

Désignons par $d\epsilon$ l'angle formé par les plans tangents de D qui correspondent aux valeurs a et $a + da$ du paramètre. Ces plans tangents ont pour génératrices de contact deux droites qui sont rabattues en D et D', et auxquelles correspondent les courbes infiniment voisines S et S'. Il est clair que, pour obtenir l'angle sous lequel le premier de ces plans tangents coupe la surface Σ , lieu des positions nouvelles des lignes S, on peut supposer que la ligne S que nous considérons reste immobile dans son plan, tandis que le plan de la ligne infiniment voisine S' tourne autour de D de l'angle $d\epsilon$.

Soit M un point de S et $MM' = ds$, l'arc de trajectoire orthogonale

compris entre S et S'. Quand S' tourne autour de D, le point M' de S' décrit un élément M'M'₁ perpendiculaire au plan de S, et l'on a, aux infiniment petits du second ordre près,

$$M'M'_1 = Y d\varepsilon,$$

Y désignant la distance de M à D.

En second lieu, le plan tangent en M à Σ est déterminé par le point M₁ et la tangente en M à la courbe S. Cette tangente étant perpendiculaire à MM', l'angle que nous cherchons, et que nous désignons par θ , n'est autre que l'angle M'MM'₁. On a donc :

$$\text{Tg } \theta = \frac{M'_1 M'}{MM'} = \frac{Y d\varepsilon}{ds}$$

En remplaçant ds par sa valeur tirée de (1), il vient simplement

$$(2) \quad \text{Tg } \theta = \frac{1}{H} \cdot \frac{d\varepsilon}{da}$$

Or, pour tous les points d'une ligne S, le paramètre a conserve une valeur constante, et il en est de même de H qui dépend uniquement de a . L'angle θ est donc le même en tous les points d'une ligne de courbure plane. On retrouve ainsi un théorème connu, et l'on obtient l'expression de $\text{Tg } \theta$.

Des réseaux similaires.

75. Nous dirons que deux réseaux (S,T), (S',T') sont similaires, lorsqu'en faisant correspondre les droites D et D' de ces réseaux qui sont parallèles, les coefficients de proportionnalité Hda et $H'da'$, relatifs à deux droites correspondantes quelconques, sont égaux.

On peut toujours supposer que les droites parallèles D et D' sont fournies par les mêmes valeurs d'un paramètre a qui sera, par exemple, l'angle que fait, avec une droite fixe, la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur la direction commune des droites D et D'. Dans cette hypothèse, la condition pour que les réseaux (S,T), (S',T') soient similaires, est que les deux fonctions H et H' soient identiques. Nous dirons que deux courbes S et S' de deux réseaux similaires se correspondent, lors-

qu'elles sont relatives à deux droites correspondantes D et D' , c'est-à-dire lorsque les centres de courbure des trajectoires orthogonales aux points de S et de S' sont situés sur des droites correspondantes D et D' . Les points correspondants de deux réseaux similaires seront les points de deux courbes S et S' correspondantes, pour lesquels les tangentes sont parallèles. Par raison d'homothétie, on voit immédiatement que, pour deux réseaux similaires, les trajectoires orthogonales se correspondent. En d'autres termes, si un point M du premier réseau décrit une trajectoire orthogonale, le point correspondant M' de l'autre réseau décrit une trajectoire orthogonale T' de ce second réseau. Cette propriété est très importante. Elle montre que lorsqu'un réseau (S, T) est entièrement connu, c'est-à-dire lorsqu'on connaît les courbes S et leurs trajectoires T , on pourra construire entièrement un réseau similaire, dans lequel on connaîtrait une seule famille de courbes.

La propriété caractéristique des réseaux similaires, est qu'on peut en déduire une infinité de couples de surfaces ayant la même image sphérique.

Pour le démontrer, considérons une surface quelconque Σ déduite du réseau (S, T) et soit (D) la développable enveloppe des plans des lignes de première courbure, qui sont identiques aux lignes S . Puisque les droites D' du réseau similaire (S', T') sont parallèles, deux à deux, aux lignes D du premier réseau, nous pourrions former, avec les droites D' , une développable (D') telle que les plans tangents de cette développable soient parallèles aux plans tangents de (D) , suivant les positions nouvelles des droites correspondantes D et D' . Soit Σ' la surface que l'on déduit du réseau (S', T') et dont les lignes de première courbure, situées dans les plans tangents de (D') , sont identiques aux lignes S' du second réseau. Je dis que la surface Σ' a la même image sphérique que Σ . En effet, les lignes de première courbure de ces surfaces sont situées deux à deux dans des plans parallèles, et ces plans coupent les surfaces sous les mêmes angles, car, si l'on fait usage, pour trouver ces angles, de la formule (2), on voit, qu'en passant de l'une des surfaces à l'autre, d_z et Hda ne changent pas. Il en résulte que les lignes de première courbure de Σ et Σ' seront représentées par les mêmes cercles de la sphère et, par suite, comme nous l'avions annoncé, que les deux surfaces ont la même image sphérique.

La réciproque est vraie : les réseaux (S, T) (S', T') correspondant à deux surfaces Σ et Σ' dont les lignes de première courbure sont planes et qui ont la même image sphérique, peuvent toujours être placées dans un même plan, de façon à devenir similaires.

En effet, les développables (D) et (D') ont leurs plans tangents parallèles, et ces plans coupent sous des angles égaux les surfaces Σ et Σ' . Il en résulte, d'abord, qu'en passant d'un réseau à l'autre, les quantités ds étant les mêmes, les coefficients de proportionnalité Hda et $H'da'$ doivent avoir les mêmes valeurs. Il est, d'ailleurs, évident, qu'on peut dérouler les développables (D) et (D') sur un plan, de façon que les positions nouvelles des génératrices correspondantes soient parallèles. Il résulte de ces observations que les réseaux (S, T) (S', T') , ainsi obtenus, sont similaires.

§ 2. — Exemples. Propriétés générales des réseaux (S, T) .

Avant d'aborder la construction générale des réseaux plans dont nous venons de donner la définition, il convient de présenter des exemples et d'exposer quelques propriétés dont nous aurons à faire usage.

Familles de droites.

76. Considérons, en premier lieu, un système quelconque de droites S tracées dans un plan. Les trajectoires orthogonales T de ces droites satisfont à la condition exprimée par le théorème du n° 70, puisque les centres de courbure de toutes les trajectoires T , en tous les points d'une droite S , se confondent en un seul point G , qui est le point de contact de S avec son enveloppe. Dans ce cas, on peut prendre pour droite D une droite quelconque, passant par le point G . Si l'on forme une développable dont les lignes D soient les rabattements des génératrices, les nouvelles positions des droites S sont les lignes de première courbure de la surface qu'elles engendrent, et qui est une nouvelle développable. Ainsi :

Un système quelconque de droites, tracées sur un plan, forme les courbes S d'un réseau (S, T) . Les droites D de ce réseau sont assujetties à la seule condition de passer par le point de contact de chaque droite

S avec son enveloppe. Les trajectoires sont les courbes ayant cette enveloppe pour développée.

Familles de cercles.

77. Un second exemple est fourni par un système de cercles.

Considérons, sur un plan, un réseau orthogonal dont les courbes d'une famille soient des cercles; soit T une trajectoire coupant orthogonalement en M un certain cercle S . Le cercle osculateur de T en M coupe orthogonalement le cercle S , ainsi que le cercle infiniment voisin S' . Son centre, qui est le centre de courbure de T en M , est donc situé sur l'axe radical de S et de S' , c'est-à-dire sur la corde qui joint les points de contact de S avec l'enveloppe des cercles. On a donc cette proposition, d'ailleurs connue :

Lorsque les courbes d'un réseau orthogonal sont des cercles, pour une famille, le centre de courbure de toute trajectoire, au point où elle coupe normalement un des cercles, est situé sur la droite qui joint les points de contact de ce cercle avec l'enveloppe des cercles du réseau.

Ceci posé, les cercles de courbure de toutes les trajectoires T , aux points où elles rencontrent normalement un cercle S , sont situés sur une droite fixe, savoir la corde des contacts de S avec l'enveloppe des cercles. Donc, le réseau considéré possède la propriété caractéristique de tout réseau (S, T) . On peut, dès lors, énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Lorsque des cercles forment sur un plan un système continu quelconque, ces cercles sont toujours les lignes S d'un réseau (S, T) . Les droites D de ce réseau sont les cordes de contact des cercles avec leur enveloppe.*

Quand la développable (D) sera formée au moyen des droites D , les nouvelles positions des cercles seront les lignes de première courbure de la surface lieu de ces courbes. Cette surface est, par conséquent, une enveloppe de sphères.

On peut établir la proposition précédente, d'une autre manière, en montrant que les cercles d'une famille et leurs trajectoires orthogonales vérifient l'équation (1) du n° 71.

Soient c et c' les centres de deux cercles infiniment voisins, D leur axe

radical, M et M' les points où ces cercles sont rencontrés par une trajectoire orthogonale quelconque. On trouve aisément que

$$MM' = MP \cdot \frac{cc'}{r},$$

MP désignant la distance du point M à l'axe radical, et r , le rayon du cercle c . Les quantités $\overline{cc'}$ et r étant les mêmes, en tous les points d'un cercle S, il en résulte que, pour un cercle quelconque, l'arc MM' de trajectoire orthogonale, compris entre ce cercle et le cercle infiniment voisin, est proportionnel à la distance de l'extrémité M à l'axe radical D des deux cercles. Par suite, les cercles considérés seront les lignes S d'un réseau (S, T), les droites D étant les axes radicaux de ces cercles successifs. Pour un pareil réseau, on aura

$$H = \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{da},$$

r étant le rayon du cercle correspondant à la valeur a du paramètre, et $d\sigma$, l'élément d'arc de la courbe lieu des centres de ces cercles.

78. On déduit, de cette dernière formule, une proposition qui nous sera utile et que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. — *Pour que deux réseaux (S, T) et (S', T) dont les lignes S et S' sont des cercles, soient similaires, il faut et il suffit que, si l'on fait correspondre les courbes (c) et (c') lieux des centres de ces cercles, par parallélisme des tangentes, les rayons des cercles soient proportionnels, dans les points correspondants, aux rayons de courbure des courbes (c) et (c').*

Nous faisons correspondre les courbes (c) et (c') par parallélisme des tangentes, de telle sorte que deux tangentes parallèles soient fournies par la même valeur du paramètre a . Quelles que soient les lois de variation des rayons, les axes radicaux seront parallèles aux points correspondants, comme étant perpendiculaires à des tangentes parallèles. Ainsi, pour une même valeur de a , les droites D des deux systèmes sont parallèles. Pour que les réseaux soient similaires, il faut encore que les fonctions H et H', relatives aux deux réseaux, soient identiques, ce qui exige que l'on ait (en affectant d'un accent les éléments du second réseau)

$$\frac{1}{r} \frac{d\tau}{da} = \frac{1}{r'} \frac{d\tau'}{da'},$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{d\tau}{d\tau'} = \frac{\xi'}{\xi},$$

ξ et ξ' étant les rayons de courbure des courbes (c) et (c') aux points correspondants.

La proposition est ainsi démontrée et fournit, de plus, la solution du problème suivant :

Un réseau (S, T) dont les lignes S sont des cercles étant donné, construire le réseau similaire le plus général, dont les lignes S soient également circulaires.

La solution comporte une fonction arbitraire qui correspond à la courbe (c') , lieu des centres des cercles du réseau demandé. On peut, effectivement, prendre pour (c') une courbe quelconque tracée dans le plan du réseau proposé, et la proportion écrite ci-dessus détermine les rayons des cercles du nouveau réseau.

REMARQUE. — Nous n'avons point parlé, jusqu'à présent, de la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles. Cette recherche équivaut à la détermination des lignes de seconde courbure d'une surface enveloppe de sphères et présente, par suite, les mêmes difficultés. Nous montrerons, plus loin, qu'il est possible de choisir les données, de façon que l'on puisse construire géométriquement toutes les trajectoires orthogonales d'un réseau (S, T) dont les lignes S sont circulaires.

Généralisation.

79. Nous venons de démontrer que, lorsque les lignes S d'un réseau (S, T) sont des cercles, les droites D sont les axes radicaux successifs des cercles S. Cette propriété a lieu pour un réseau (S, T) quelconque, quand on y remplace les lignes S par leurs cercles osculateurs aux points où elles sont coupées normalement par une même trajectoire. En effet, les cercles osculateurs à deux courbes infiniment voisines S et S', aux points M et M' où elles rencontrent normalement une trajectoire T, coupent orthogonalement le cercle osculateur de T en M, ainsi que le cercle osculateur de la trajectoire infiniment voisine T₁, au point M₁ de S infi-

niment voisin de M. Donc, la ligne des centres de ces deux derniers cercles, savoir D (n° 77), est l'axe radical des deux premiers. Ainsi :

Les cercles osculateurs de deux courbes S infiniment voisines, aux points où elles sont coupées normalement par une même trajectoire T, ont, pour axe radical, la droite D correspondante à S.

80. On en déduit une proposition fort élégante, due à M. l'abbé Aoust, et dont voici l'énoncé.

THÉORÈME. — *Lorsque les lignes de courbure d'une surface sont planes pour une famille, toutes ces lignes seront circulaires, si l'une d'entre elles est un cercle.*

Considérons une surface Σ dont les lignes de première courbure sont planes, et soit (S, T) le réseau plan correspondant. Si l'on suppose, de plus, que l'une des lignes de première courbure de Σ soit un cercle, l'une des courbes S du réseau plan sera un cercle. Soit c le centre de ce cercle S, D la droite qui lui correspond, et S' la courbe infiniment voisine du réseau. Si l'on construit le cercle osculateur en un point quelconque de S', l'axe radical de ce cercle et de S sera la droite D, d'après ce qui précède. Par suite, le centre de ce cercle osculateur sera situé sur la perpendiculaire abaissée du point c sur D. La courbe S' est donc telle que tous ses centres de courbure sont sur une même droite fixe, ce qui exige que ces centres se confondent et que la courbe S' soit un cercle. On démontrerait, de même, que la courbe S'', infiniment voisine de S', est pareillement un cercle, et ainsi de suite. Donc, toutes les courbes S du réseau (S, T) sont des cercles, et il en est de même des lignes de première courbure de Σ qui leur sont identiques. La surface Σ est, par conséquent, une enveloppe de sphères.

En particulier, si une surface Σ a toutes ses lignes de courbure planes, et si, dans chaque système, une de ces lignes est circulaire, Σ est une cyclide.

Réseaux réciproques.

81. Revenons au réseau plan (S, T) le plus général, pour étudier les courbes, lieux des centres de courbure de toutes les lignes S, aux points où elles sont coupées normalement par une même ligne T. Soit c le centre de courbure d'une ligne S, au point où elle est coupée normalement par la ligne T, et c' le point analogue, relatif à la ligne infiniment

voisine S' . Les cercles osculateurs des courbes S et S' dont les centres sont c et c' , ont pour axe radical la droite D , correspondante à S . Il en résulte que l'élément cc' de la courbe (c) est perpendiculaire à D . Donc :

Les courbes, lieux des centres de courbure des lignes S , aux points où elles sont coupées normalement par une même ligne T , correspondent à la courbe A , enveloppe des droites D , par orthogonalité des éléments.

Cette propriété va nous permettre de reconnaître dans quel cas le réseau (S, T) est réciproque, c'est-à-dire quelle est la condition qui doit être remplie, pour que les trajectoires T puissent devenir, à leur tour, lignes de courbure d'une surface.

Pour cela, il est nécessaire et suffisant, d'après le théorème du n° 70, que les courbes (c) soient des droites, et, par suite, que les lignes D soient parallèles. Si cette condition est remplie, les lignes (c) seront des droites parallèles entre elles et perpendiculaires aux droites D . Les deux séries de développables ayant pour rabattements de leurs génératrices, soit les droites D , soit les droites c , seront, évidemment, des cylindres.

Ceci posé, soit Σ une surface dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents d'un cylindre. Déroulons le cylindre sur un plan, chaque plan tangent entraînant la ligne correspondante. Ces lignes de courbure formeront les courbes S d'un réseau (S, T) . En vertu de la remarque qui précède, les trajectoires orthogonales T , qui correspondent point par point aux lignes de seconde courbure de Σ , peuvent devenir à leur tour lignes de courbure d'une infinité de surfaces, obtenues par l'enroulement du plan de la figure sur un nouveau cylindre, dont les rabattements des génératrices sont les droites c , perpendiculaires aux droites D .

Condition pour que les courbes d'une famille soient les lignes S d'un réseau (S, T) .

82. Proposons-nous actuellement de résoudre le problème suivant :

Trouver la condition pour que des courbes tracées sur un plan, où elles forment un ensemble continu, puissent devenir les lignes de courbure de la surface obtenue quand on enroule le plan sur une développable, de façon que les courbes considérées soient entraînées dans les plans tangents successifs de cette développable.

Cela revient à trouver la condition pour que les courbes données soient les lignes S d'un réseau (S, T).

Soit :
$$(3) \quad f(x, y, a) = 0$$

l'équation générale des courbes données, rapportées à deux axes rectangulaires tracés dans le plan. Dans cette équation, a désigne un paramètre dont les valeurs fournissent individuellement les courbes du système donné. Pour que ces lignes soient les lignes S d'un réseau (S, T), il faut et il suffit que l'on puisse passer d'un point quelconque M (x, y) de l'une de ces courbes C au point correspondant M' ($x + \delta x, y + \delta y$) de la courbe infiniment voisine, en portant, sur la normale en M à C, une longueur MM' proportionnelle à la distance du point M à une certaine droite liée à C, de telle sorte que cette distance soit égale à une fonction du premier degré des coordonnées x et y de M, les coefficients de cette fonction dépendant uniquement de a . Or, la courbe infiniment voisine correspond à la valeur $a + \delta a$ du paramètre a . En exprimant que le point M' appartient à cette courbe, on aura d'abord :

$$f(x + \delta x, y + \delta y, a + \delta a) = 0,$$

et si l'on retranche l'équation (3) de la précédente, il viendra

$$(4) \quad \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{da} \delta a = 0$$

D'autre part, la droite MM' étant perpendiculaire à la tangente en M à c , on a

$$\frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{\delta x}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{\delta y}{\left(\frac{df}{dy}\right)} = - \frac{\delta a \left(\frac{df}{da}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2},$$

en tenant compte de (4).

D'un autre côté,

$$MM' = \sqrt{\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2}$$

Au moyen des équations précédentes on trouve

$$(5) \quad MM' = \frac{\varepsilon a \cdot \frac{df}{da}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

Il reste maintenant à exprimer que cette quantité est de la forme $(Ax + By + C) \varepsilon a$, où A , B , C , sont des fonctions de la seule variable a .

L'équation de contition est donc

$$(6) \quad \frac{df}{da} = (Ax + By + C) \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}$$

Cette équation doit être satisfaite pour les coordonnées de tous les points d'une courbe C quelconque et, par suite, pour tous les systèmes de valeurs des variables x , y et a qui vérifient l'équation (3).

Ainsi, pour que les courbes données C soient les lignes S d'un réseau (S,T) , il est nécessaire et suffisant que l'on puisse trouver trois fonctions de a savoir A , B et C , telles que l'équation (6) ait lieu en même temps que l'équation (3). Cela exige qu'en éliminant, entre (3) et (6), l'une des variables y , par exemple, l'équation restante soit identique par rapport aux deux autres variables.

Si cette condition est remplie, les lignes C seront les lignes S d'un réseau (S,T) et l'équation générale des droites D qui leur correspondent sera

$$(7) \quad Ax + By + C = 0$$

Enveloppe des lignes S d'un réseau (S,T) .

83. L'interprétation géométrique de la condition que nous venons de trouver se rapporte à l'enveloppe des lignes S d'un réseau (S,T) .

Supposons que l'équation (3) soit l'équation générale des lignes S d'un

réseau (S,T), d'ailleurs quelconque. Alors, d'après ce qui précède, pour tous les systèmes vérifiant l'équation (3), l'équation (6) sera satisfaite.

Ceci posé, les points de contact de toute ligne S avec son enveloppe sont déterminés par le système.

$$(\alpha) \begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ \frac{df}{da} = 0 \end{cases}$$

En vertu de l'égalité (6) qui a lieu pour les valeurs vérifiant la première des équations (α), les solutions de ce système sont fournies par celles des trois systèmes suivants

$$(\beta) \begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad (\gamma) \begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ \frac{df}{dx} + i \frac{df}{dy} = 0 \end{cases} \quad (\gamma') \begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ \frac{df}{dx} - i \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$$

où i est mise à la place de $\sqrt{-1}$

Le système (β) donne les coordonnées des points de rencontre d'une ligne S avec la droite D correspondante. Il en résulte que la première partie de l'enveloppe des lignes S est formée du lieu des points où chacune de ces courbes est rencontrée par la droite D qui lui correspond.

Les systèmes (γ) et (γ') fournissent les points d'une ligne S où les tangentes ont $\pm i$ pour coefficients angulaires, c'est-à-dire sont *isotropes*. Ces points sont imaginaires et peuvent être situés à distance ou infinie. Dans ce dernier cas, ils se confondent avec les ombilics du plan, c'est-à-dire avec les points circulaires à l'infini. On voit par là que si une ligne S passe par les ombilics du plan, elle aura ces points communs avec l'enveloppe, et, par suite, la courbe infiniment voisine S' passera aussi par les ombilics. Il en sera de même, de proche en proche, de toutes les lignes S du réseau.

En second lieu, si une ligne S admet une tangente isotrope dont le point de contact soit à distance finie, cette ligne touchera son enveloppe en ce point et, par suite, cette tangente isotrope sera commune à toutes les lignes S du réseau.

En résumé, on a les propriétés suivantes :

THÉORÈME. — *L'enveloppe des lignes S d'un réseau (S,T) se compose*

du lieu des points où chacune de ces courbes est rencontrée par la droite D correspondante, et des tangentes isotropes de l'une d'entre elles, que ces lignes S touchent, en même temps, à distance finie ou infinie.

Si l'on se rappelle la définition, donnée par Plucker, des foyers d'une courbe plane, on voit que l'on peut exprimer autrement la seconde partie en disant que les lignes S d'un réseau (S,T) *sont homofocales*. Il en résulte immédiatement *que les trajectoires T sont homofocales aux lignes S.*

On sait, en effet, que lorsque les lignes d'une famille d'un réseau orthogonal sont homofocales, elles ont les mêmes foyers que les courbes de la seconde famille.

84. La partie réelle E de l'enveloppe est le lieu des points où les courbes S rencontrent les droites D correspondantes. Quand on aura reconstitué la développable, la courbe E sera transformée en une courbe E' tracée sur cette développable et tangente aux nouvelles positions des lignes S. Il résulte de là que les lignes de première courbure de la surface ont pour enveloppe E' et, dès lors, d'après une propriété connue, cette enveloppe est *une arête de rebroussement de la surface*. La remarque précédente a été faite par M. O. Bonnet.

Examinons encore ce que deviennent les tangentes isotropes communes à toutes les lignes S du réseau (S,T), lorsque ces lignes sont entraînées dans les plans tangents de la développable D. Une quelconque de ces tangentes isotropes engendre une développable dont les génératrices, situées dans les plans tangents de D, sont isotropes pour chacun de ces plans tangents, et restent tangentes aux lignes S correspondantes, de telle sorte que cette développable contient le cercle de l'infini et, de plus, est circonscrite à la surface.

L'ensemble des tangentes isotropes communes aux lignes S du réseau (S,T) engendre, par conséquent, la développable isotrope circonscrite à la surface correspondante à ce réseau, c'est-à-dire la développable tangente à cette surface et contenant le cercle de l'infini.

La courbe de contact de la développable isotrope avec la surface, correspond, point par point, au lieu des points où les lignes S touchent leurs tangentes isotropes communes. D'après une remarque faite par M. Darboux, on sait que cette courbe est une ligne de courbure singulière de la surface. (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, page 23).

EXEMPLES. — 85. Supposons que l'une des lignes S d'un réseau (S,T) soit un cercle. Cette courbe passe, dès lors, par les ombilics et toutes ses tangentes isotropes ont leurs points de contact à l'infini. Il doit en être de même pour toutes les autres lignes S du réseau, d'où il résulte que ces lignes S sont des cercles. On retrouve ainsi la proposition de M. l'abbé Aoust, donnée au n° 80.

Comme second exemple, proposons-nous de rechercher, s'il est possible que toutes les lignes de première courbure d'une surface soient des coniques non circulaires. Cela revient à examiner s'il est possible que les lignes S d'un réseau (S,T) soient des coniques. D'abord, ces coniques doivent être homofocales et, en second lieu, les points d'intersection de deux coniques infiniment voisines doivent être situés sur la droite D correspondante à l'une d'elles. Cette dernière condition n'est pas remplie, car les points d'intersection de deux coniques homofocales sont situées sur les *deux diamètres* communs à ces courbes.

Donc, les lignes de courbure d'une surface ne peuvent être toutes des coniques pour un même système, à moins que ces coniques ne soient des cercles.

86. Pour donner un dernier exemple, considérons une famille de cubiques représentées individuellement par une équation de la forme

$$y^2 = \alpha (x - \beta)^2 (x - \gamma),$$

où α , β et γ sont des paramètres quelconques. Ces cubiques sont caractérisées par les propriétés suivantes : 1° elles possèdent un axe de symétrie; 2° elles ont un point double à distance finie et un point d'inflexion à l'infini. Cherchons dans quel cas ces cubiques pourront former les lignes S d'un réseau (S,T). Une première condition est que ces courbes soient homofocales, ce qui exige d'abord qu'elles aient le même axe de symétrie. En prenant cet axe pour axe de x , l'équation générale des courbes considérées, sera celle que nous avons écrite plus haut où α , β , γ sont des fonctions d'une même variable a .

En exprimant, conformément à ce que nous avons dit (n° 82), que l'identité

$$\frac{df}{da} = (Ax + By + C) \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2},$$

est satisfaite, on arrive sans difficulté aux conclusions suivantes :

1° Toutes ces cubiques sont semblables entre elles, et les tangentes au point double forment un angle de 60° , ce qui caractérise la podaire négative d'une parabole, par rapport à son foyer ;

2° Ces courbes ne peuvent être assemblées *que d'une seule manière*, à l'homothétie près.

D'autre part, on sait qu'il existe une surface minima, extrêmement remarquable, découverte par M. Enneper (Zeitschrift für Mathematik, Leipzig, journal de Schönmacher, 1862), et dont les lignes de courbure, planes pour les deux systèmes, sont semblables à la podaire négative d'une parabole par rapport à son foyer.

Par un raisonnement dont nous pouvons supprimer les détails, on parviendra à l'énoncé suivant :

Il existe une infinité de surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont des cubiques à point double, possédant un axe de symétrie et présentant un point d'inflexion à l'infini. Toutes ces surfaces s'obtiennent en déformant arbitrairement le cylindre enveloppe des plans des lignes de courbure de la surface de M. Enneper, de façon que chaque plan tangent entraîne la ligne de courbure correspondante.

§ 3. — Construction générale des réseaux (S,T) et des surfaces correspondantes.

87. Si l'on regarde les réseaux (S,T) comme déduits des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes, la construction de ces réseaux résulte des constructions données au chapitre précédent et du théorème fondamental du n° 69. Mais on peut se poser le problème réciproque, qui consiste à construire directement les réseaux (S,T) pour en déduire ensuite les surfaces que nous étudions. L'objet de ce paragraphe est de donner la solution du problème dont nous venons de parler, et de présenter ainsi de nouveaux modes de génération des surfaces à lignes de courbure planes pour un système. Cette solution repose sur deux théorèmes analogues à ceux des nos 26 et 50, et dont la démonstration doit d'abord nous occuper.

THÉORÈME. — *Il existe une infinité de réseaux similaires d'un réseau (S,T) donné, dans lesquels les lignes S sont des cercles et correspondent aux mêmes droites D que les lignes S du réseau proposé.*

Soit (S, T) un réseau donné, et T une trajectoire orthogonale.

Considérons les cercles osculateurs S' des lignes S aux points M où elles sont coupées orthogonalement par T . Je dis que le réseau dont les courbes d'une famille sont les cercles S' répond aux conditions de l'énoncé. En effet, d'après la propriété démontrée au n° 79, les cercles S' ont pour axes radicaux successifs les droites D relatives aux lignes S . En outre, la fonction H est la même pour les deux réseaux, puisque les droites D sont les mêmes, et que ces deux réseaux ont une trajectoire orthogonale commune. Le théorème est ainsi démontré.

88. THÉORÈME. — *Lorsque deux réseaux (S, T) , (S', T') sont similaires et relatifs au même système de droites D , les développées des trajectoires orthogonales correspondantes sont des courbes parallèles par rapport au système des droites D .*

Réciproquement, soit un réseau (S, T) . Si l'on remplace les développées des trajectoires T par des courbes qui leur soient respectivement parallèles par rapport aux droites D , de telle sorte que le paramètre définissant individuellement les nouvelles courbes soit une fonction continue quelconque du paramètre définissant les courbes primitives, ces courbes sont les développées des trajectoires orthogonales T' d'un réseau (S', T') similaire du premier et relatif aux mêmes droites D .

La première partie résulte des observations faites au n° 75, de telle sorte qu'il suffit de démontrer la réciproque.

Soit donc un réseau (S, T) . Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par G les développables des trajectoires T . Les points des courbes G sont sur les droites D . Chaque courbe G a une infinité de courbes parallèles par rapport aux droites D , et l'une de ces courbes est complètement déterminée quand on connaît un de ses points. Ceci posé, effectuons la construction suivante :

1° *Faisons correspondre, suivant une loi continue quelconque, aux points γ où les diverses développées G rencontrent une certaine droite D , des points γ' situés sur cette droite, et, par chacun de ces points γ' , menons la courbe G' parallèle, relativement au système des droites D , à la courbe G qui passe par le point correspondant γ .*

2° *Les tangentes aux diverses courbes G' ainsi obtenues, dans les points où elles rencontrent une même droite D quelconque, envelopperont une courbe S' , qui correspondra à cette droite D .*

Nous allons démontrer que le réseau dont les courbes d'une famille sont les lignes S' correspondantes aux droites D, est similaire du premier, et que les courbes G' sont les développées des trajectoires orthogonales T' des lignes S'.

Concevons, en effet, dans la première figure, deux lignes infiniment voisines S et S₁ que deux trajectoires infiniment voisines quelconques T et T₁ coupent respectivement en M et M₁, N et N₁. Les tangentes aux courbes S et S₁ en M et M₁ vont se couper en un point γ qui est sur la droite D correspondante à S, et qui appartient à la développée G de T. De même, les tangentes en N et N₁ aux courbes S et S₁ se coupent en un point γ_1 de D qui est situé sur la développée G₁ de T₁. Dans la seconde figure, les quatre tangentes dont nous venons de parler sont remplacées par des droites parallèles se coupant deux à deux aux points γ' et γ_1 , qui correspondent à γ et γ_1 . Le quadrilatère infiniment petit MM₁N₁N est dès lors remplacé par un quadrilatère homothétique. On tire de là les conclusions suivantes :

1° Si un point M de la première figure décrit une trajectoire T, le point correspondant M' de la seconde décrit une trajectoire orthogonale T' des lignes S' ;

2° Les développées des lignes T' sont les courbes G', de telle sorte que le réseau formé par les courbes S' et T' est un réseau (S,T) relatif aux mêmes droites (D) que le premier ;

3° Ces deux réseaux sont similaires, car si δ est la distance du point M à la droite D, le rapport $\frac{MM_1}{\delta}$ ne change pas, dans la seconde figure, pour la raison d'homothétie donnée précédemment.

Toutes les parties de la proposition sont donc établies.

La conclusion que l'on doit en tirer est la même que celle du n° 37.

Lorsqu'on connaîtra un réseau (S,T) relatif à un système de droites D et à une valeur donnée de H, on obtiendra tous les réseaux remplissant les mêmes conditions, au moyen de la construction que nous venons de donner, et qui consiste à remplacer les lignes G par des lignes parallèles relativement aux droites D.

Or, d'après le théorème du n° 87, il existe toujours un réseau dont les lignes S sont circulaires et satisfaisant aux autres conditions. Donc, on pourra déduire tous les réseaux (S,T) des réseaux particuliers dans les-

quels les lignes S sont des cercles, en appliquant à ces derniers la construction du théorème précédent, laquelle exige que l'on connaisse d'avance les trajectoires orthogonales de la famille des cercles. Nous montrerons qu'il est possible de choisir les fonctions arbitraires définissant de pareils réseaux, de façon que les trajectoires orthogonales soient mises en évidence.

Comme au chapitre II, nous considérerons d'abord le cas particulier avant d'aborder le cas général. Mais nous ferons auparavant la remarque suivante.

REMARQUE. — On vient de démontrer qu'un réseau (S, T) étant donné, il existe une infinité de réseaux similaires relatifs aux mêmes droites D , et l'on a indiqué la construction générale de ces réseaux, laquelle comporte une fonction arbitraire.

Il est visible que le nouveau réseau sera complètement défini, si l'on connaît une de ses lignes S' et la ligne S du premier réseau à laquelle elle correspond, car on connaîtra, par cela même, la loi de correspondance des points γ et γ' . En particulier, si la ligne S' est un cercle, toutes les lignes S' du nouveau réseau sont des cercles (n° 80).

Cette remarque fournit une autre démonstration du théorème du n° 87. La nouvelle démonstration est plus générale que la première, car celle-ci ne s'applique pas au cas où les lignes S du réseau primitif sont des cercles. Elle fait voir, en outre, de quelle manière on peut obtenir tous les réseaux similaires d'un réseau (S, T) relatifs aux mêmes droites D , et dont les lignes S sont circulaires.

I. — Cas où la fonction H est identiquement nulle. *Surfaces de Monge.*

89. D'après la formule (2) du n° 74, l'hypothèse $H = 0$ fournit les surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans normaux à la surface. Cherchons les réseaux (S, T) qui leur correspondent.

Puisque, pour toute valeur de a , H est nulle, la formule (1) du n° 73 donne $ds = 0$. Il en résulte que toutes les courbes S se confondent en une seule et même courbe de forme quelconque, et que les trajectoires T se réduisent aux points de cette courbe. Les droites D sont quelconques.

En enroulant le plan de S sur une développable arbitraire, les diffé-

rentes positions de cette courbe seront les lignes de première courbure de la surface qu'elles engendrent, et les trajectoires décrites par les différents points de S sont les lignes de seconde courbure.

On retrouve ainsi les surfaces de Monge et le mode de génération dont nous avons déjà parlé (n° 33).

II. — *Cas où les droites D se confondent. — Surfaces de Joachimstal.*

90. Les réseaux (S, T) pour lesquels les droites D coïncident, correspondent évidemment aux surfaces de Joachimstal. Les trajectoires T doivent avoir leurs centres de courbure sur D , ce qui exige que chacune de ces courbes T soit un cercle ayant son centre sur D .

Réciproquement, supposons que l'on ait tracé, sur un plan, un réseau formé par des cercles dont les centres sont situés sur D , et par les courbes qui coupent ces cercles à angles droits. Ces dernières seront les lignes S d'un réseau (S, T) relatif à la droite D , car les centres de courbure des courbes orthogonales aux lignes S sont toujours situés sur D , puisque les trajectoires orthogonales sont des cercles ayant leurs centres sur D .

Dès lors, si l'on fait tourner les plans des lignes S autour de D , suivant une loi continue quelconque, les nouvelles positions des courbes S seront les lignes de première courbure de la surface qui les contient et les plans de ces lignes passeront par D . — Quant aux lignes de seconde courbure qui correspondent, point par point, aux cercles T du réseau, elles appartiendront visiblement aux sphères décrites par les cercles T , dans les rotations dont nous venons de parler. En outre, ces sphères sont orthogonales à la surface, puisqu'elles coupent, à angles droits, les lignes S dans toutes leurs positions.

Les surfaces engendrées de cette manière, ne sont autres que les surfaces de Joachimstal. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le réseau (S, T) correspondant à toute surface de Joachimstal est formé, pour les trajectoires T de cercles ayant leurs centres sur une même droite D et, pour les lignes S , par les courbes orthogonales à ces cercles.*

Il s'agit maintenant de construire les réseaux pour lesquels les lignes T sont des cercles ayant leurs centres en ligne droite. — Or, un réseau de cette sorte étant donné, il existe toujours un réseau similaire relatif

à la même droite et pour lequel les lignes S seront des cercles ayant, par suite, cette droite pour axe radical. Inversement, soit un réseau formé d'une famille de cercles S ayant même axe radical D , et de leurs trajectoires orthogonales T , qui sont pareillement des cercles ayant un même axe radical perpendiculaire à D . — Appliquons à ce réseau la construction du n° 88, nous obtiendrons un réseau similaire (S', T') relatif à la même droite D et tel, par conséquent que les courbes T' soient des cercles ayant leurs centres sur D .

La construction générale des réseaux dont nous nous occupons est donc la suivante :

THÉORÈME. — *Les lignes S du réseau (S, T) le plus général dont les lignes T sont des cercles ayant leurs centres sur une droite D , sont les enveloppes des droites que l'on obtient en transportant, parallèlement à elles-mêmes, les tangentes d'une famille de cercles coupant la droite D en deux points fixes, de façon que la translation, estimée parallèlement à D , conserve une valeur constante quand le point de contact de la tangente décrit un cercle orthogonal aux cercles de la première famille et varie, d'après une loi continue quelconque, quand on passe d'un de ces cercles au suivant.*

La solution générale comporte une fonction arbitraire. Celle-ci sera déterminée si l'on donne une première ligne S du réseau (S, T) que l'on fera correspondre, par parallélisme des tangentes, à un cercle quelconque de la famille. — On a ainsi une nouvelle solution géométrique du problème résolu au n° 14, savoir : Construire les trajectoires d'une série des cercles ayant leurs centres sur une droite D , connaissant l'une d'entre elles.

Cette construction permettrait aussi de vérifier que le théorème de collinéation établi, au n° 39, pour les lignes de seconde courbure d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur un même plan, subsiste pour les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres en ligne droite. A son tour, ce théorème fournirait une nouvelle solution du problème dont nous venons de parler. — Comme cette solution est une conséquence directe de celle du n° 41, nous n'insisterons pas davantage sur le rapprochement qui précède.

Nouveau mode de génération des surfaces de Joachimstal.

91. Chaque réseau (S,T) construit, comme nous venons de l'expliquer, donnera une infinité de surfaces de Joachimstal. — Considérons celle de ces surfaces pour laquelle une certaine trajectoire T est venue se placer dans un plan P oblique à la droite D, ce qui est possible, en choisissant convenablement la loi de rotation des plans des lignes S autour de D. La surface particulière ainsi obtenue a ses lignes de première courbure dans des plans parallèles à une direction fixe, et l'une de ses lignes de seconde courbure est contenue dans un plan P oblique à D. D'après le théorème du n° 5, les lignes de seconde courbure de cette surface sont toutes planes, et comme elles sont déjà sphériques, ces lignes seront circulaires, en sorte que la surface sera une enveloppe de sphères dont toutes les lignes de courbure sont planes. On obtiendra les surfaces de Joachimstal, relatives au réseau considéré en changeant la loi de rotation des courbes S autour de D. Il est donc possible de déduire ces surfaces de la surface particulière que nous avons été conduit à considérer et dont la génération est indépendante de la construction préalable du réseau (S,T) n° 8). A ce point de vue, la définition des surfaces dont nous nous occupons sera la suivante.

THÉORÈME. — *La surface de Joachimstal la plus générale est le lieu des positions nouvelles qu'occupent les lignes de courbure non-circulaires S d'une surface enveloppe de sphères dont toutes les lignes de courbure sont planes, après qu'on a fait tourner les plans des courbes S autour de leur droite d'intervention D, de façon à changer, suivant une loi continue quelconque, les angles que ces plans forment entre eux, chacun de ces plans entraînant, dans son mouvement, la ligne correspondante S.*

Les lignes de première courbure sont les positions nouvelles des lignes S. Les lignes de seconde courbure appartiennent aux sphères ayant leurs centres sur D, lesquelles coupent orthogonalement la surface initiale et toutes celles qu'on en déduit.

En particulier, les girocyclides de M. Amigues se déduisent de la cyclide, en changeant arbitrairement les angles formés par les plans des cercles de courbure de l'un ou de l'autre système.

III. — *Cas où les droites D sont parallèles. — Surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre.*

92. — Les réseaux (S,T) pour lesquels les droites D sont parallèles correspondent aux surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cylindre. Nous avons vu (n° 81) que ces réseaux sont réciproques.

Si l'on considère un de ces réseaux, il existera, comme on sait, une infinité de réseaux similaires relatifs aux mêmes droites D et dont les lignes S seront les cercles. — Comme les axes radicaux successifs de ces cercles sont des droites parallèles D, il en résulte que les cercles doivent avoir leurs centres en ligne droite.

D'après ce qui précède, on sait construire ces réseaux particuliers, avec les trajectoires orthogonales des cercles qui forment la première famille. — Pour obtenir les réseaux plus généraux, il suffira d'appliquer à ceux-ci la construction fournie par le théorème du n° 88, en remarquant que deux courbes parallèles, relativement à un système de droites parallèles D, sont identiques et se déduisent l'une de l'autre par une translation effectuée dans la direction commune des droites D.

La construction est exprimée par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Les lignes S du réseau (S,T) le plus général relatif à un système des droites parallèles, sont les enveloppes des droites obtenues en transportant, parallèlement à elles-mêmes, les tangentes d'une famille de cercles ayant leurs centres sur une même droite L, de telle sorte que la translation, estimée suivant une perpendiculaire à L, conserve une valeur constante quand le point de contact de la tangente parcourt une trajectoire orthogonale des cercles et varie, d'après une loi continue quelconque, quand on passe d'une trajectoire à la suivante.*

Chaque ligne S est l'enveloppe des positions nouvelles des tangentes à un même cercle du réseau primitif. Les trajectoires orthogonales correspondent à celles de la famille des cercles, et les développées de deux trajectoires orthogonales correspondantes sont identiques.

Il entre deux fonctions arbitraires dans la définition générale des réseaux dont nous venons de donner la construction. L'une d'elles est

relative au réseau circulaire initial, et l'autre, à la loi de translation dont il est question ci-dessus.

Ce réseau étant obtenu, on enroulera le plan sur un cylindre de forme quelconque, tel que les droites D soient les rabattements des génératrices. Alors, les lignes S , entraînées dans les plans tangents de ce cylindre, seront les lignes de première courbure de la surface lieu de ces courbes. Cette surface sera, en même temps, la plus générale de son espèce.

Nouveau mode de génération des surfaces dont les lignes de première courbure sont contenues dans des plans parallèles à une droite fixe.

93. Chaque réseau (S, T) donne une infinité de surfaces jouissant de la propriété dont nous venons de parler. Parmi ces surfaces, considérons celle qui est obtenue de la manière suivante. Prenons un plan P oblique aux droites D et, à l'aide de rotations infiniment petites de la figure autour des droites D successives, plaçons une certaine trajectoire T du réseau dans le plan P . La surface ainsi obtenue Σ , aura ses lignes de première courbure dans les plans tangents d'un cylindre et, en même temps, une ligne de seconde courbure (celle qui correspond, point par point, à T) sera située dans un plan P oblique aux génératrices du cylindre. Il en résulte que Σ a toutes ses lignes de courbure planes.

On voit par là, qu'à tout réseau (S, T) relatif à des droites parallèles, correspondent une infinité de surfaces ayant toutes leurs lignes de courbure planes, qui pourront servir, à leur tour, à former les autres surfaces qui correspondent à ce réseau (S, T) , quand on déformera le cylindre enveloppe des plans des lignes S . — En d'autres termes, les surfaces que nous étudions actuellement peuvent se déduire des surfaces particulières à lignes de courbure planes, pour les deux systèmes, dont le mode de génération, donné au (n° 28), est indépendant de la considération des réseaux (S, T) . — On a ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La surface la plus générale dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cylindre, est le lieu des positions qu'occupent les lignes de l'une des courbures S d'une surface dont toutes les lignes de courbure sont planes, quand on déforme arbitrairement le cylindre enveloppe des plans des lignes S , chaque plan tangent entraînant la courbe S correspondante.*

Les lignes de première courbure de la surface obtenue, sont les positions nouvelles S' des lignes S , et les lignes de seconde courbure correspondent, point par point, comme nous l'avons dit au n° 70, aux lignes de seconde courbure de la surface proposée.

IV. — *Cas où les droites D sont concourantes. Surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône.*

94. Les réseaux (S, T) relatif à des droites D concourantes, correspondent aux surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans les plans tangents d'un cône. Chaque réseau de cette espèce admet une infinité de réseaux similaires relatifs aux mêmes droites, et dont les lignes S sont des cercles. Les axes radicaux des cercles de l'un quelconque de ces réseaux passant par le point de concours O des droites D , il s'ensuit que ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe ayant le point O pour centre. On peut particulariser davantage et supposer nul le rayon du cercle orthogonal. En d'autres termes, étant donné un réseau (S, T) relatif à des droites passant par un point fixe O , il existe une infinité de réseaux similaires relatifs aux mêmes droites et dont les lignes S sont des cercles passant par O .

Prenons, en effet, une trajectoire orthogonale T du réseau donné (S, T) , et traçons la famille des cercles passant par le point O et coupant T orthogonalement. Les droites D relatives à ces cercles passeront par le point O et par les centres de courbure de T , en sorte que ces droites seront les mêmes que celles du réseau (S, T) . En outre, les deux réseaux ont une trajectoire commune et, par suite, ils sont similaires.

Il est très facile de construire ces réseaux de cercles, de façon que les trajectoires orthogonales soient en évidence. On voit immédiatement que les réseaux (S, T) dont les courbes S sont des cercles passant par un point fixe O , s'obtiennent en prenant, par rapport au point O , la figure inverse du réseau formé par une courbe arbitraire Ω , le système de ses normales et les courbes parallèles à la première. Les cercles du réseau sont les transformées des normales; les trajectoires T sont les courbes inverses de Ω et des courbes parallèles; enfin, les droites D sont les lignes joignant l'origine aux centres de courbure de Ω .

Pour déduire, des réseaux particuliers que nous venons de construire, les réseaux (S,T) relatifs à des droites concourantes, nous appliquerons aux premiers la transformation indiquée par le théorème du n° 88, en observant que deux courbes parallèles, relativement à un système de droites D concourantes, sont homothétiques par rapport au point de concours de ces droites.

On a donc l'énoncé suivant :

THÉOREME. — *Les lignes S du réseau (S,T) le plus général relatif à des droites concourantes, sont les enveloppes des droites obtenues en transportant, parallèlement à elles-mêmes, les tangentes d'une famille de cercles passant par un point fixe O, de telle sorte que le rapport des distances du point O aux deux positions d'une tangente, conserve une valeur constante quand le point de contact de cette tangente parcourt une trajectoire orthogonale de la famille des cercles, et varie, d'après une loi continue quelconque, quand on passe d'une de ces trajectoires à la suivante.*

Chaque ligne S du second réseau est l'enveloppe des positions nouvelles des tangentes à un même cercle du réseau primitif. Les trajectoires orthogonales correspondent à celles de la famille des cercles, et les développées de deux trajectoires correspondantes sont homothétiques par rapport à O. La définition du réseau (S,T) le plus général, relatif à des droites concourantes, comporte deux fonctions arbitraires, dont l'une provient du réseau circulaire initial, et l'autre, de la loi de variation du rapport dont il est question ci-dessus. On peut dire encore que la seconde fonction arbitraire correspond au choix d'une ligne S pour le second réseau. Il est visible, en effet, que si l'on se donne une ligne S, correspondante à l'un des cercles du réseau initial, la loi de variation du rapport est connue par cela même. (Voir n° 48.)

Comme cas particulier, on peut déduire, des réseaux de cercles passant par un point fixe, les réseaux de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe. Il suffit, à cet effet, de prendre, pour ligne S du second réseau, un cercle quelconque.

Au moyen de la construction qui en résulte, on vérifie que le théorème de collinéation, donné au n° 45 pour les lignes de seconde courbure d'une enveloppe de sphères orthogonales à une sphère fixe, subsiste pour les trajectoires d'une famille de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe.

Les réseaux (S,T) étant obtenus, on en déduira, par le procédé connu, les surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône.

Nouveau mode de génération des surfaces dont les lignes de première courbure sont situées dans des plans passant par un point fixe.

95. Chaque réseau (S,T) donne une infinité de ces surfaces. Parmi ces dernières, considérons celle qu'on obtient en disposant les rotations infiniment petites autour des droites D successives, de façon que les points d'une trajectoire T viennent se placer sur une sphère K, ce qui est évidemment possible. La surface ainsi formée aura d'abord ses lignes de première courbure dans des plans passant par un point fixe O. En second lieu, deux de ses lignes de seconde courbure seront sphériques, savoir : 1^o celle qui correspond, point par point, à T et qui appartient, par construction, à une sphère K ; 2^o celle qui est contenue sur la sphère de centre O coupant orthogonalement la surface Σ (n^o 49). D'après un théorème démontré (n^o 62), Σ a toutes ses lignes de seconde courbure sphériques. Ainsi, à tout réseau (S,T) relatif à des droites D concourantes correspondent une infinité de surfaces Σ dont les lignes de seconde courbure sont sphériques.

On pourra former toutes les surfaces correspondant au réseau donné (S,T), en déformant le cône enveloppe des plans des lignes de première courbure de Σ .

Or, cette surface Σ est susceptible d'un mode de génération donné au paragraphe 2, chapitre II, et qui est indépendant de la construction des réseaux (S,T). Par suite, on a un nouveau mode de génération des surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône, en les déduisant des surfaces particulières dont les lignes de seconde courbure sont sphériques. Cette construction est traduite par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *La surface la plus générale dont les lignes de première courbure sont contenues dans les plans tangents d'un cône, est le lieu des positions qu'occupent les lignes de courbure planes S d'une surface dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques, pour l'autre, quand on déforme arbitrairement le cône enveloppe des*

plans des lignes S, chaque plan tangent entraînant la courbe S correspondante.

Les lignes de première courbure de la surface obtenue sont les positions nouvelles S' des lignes S , et les lignes de seconde courbure correspondent, point par point, (n° 70) aux lignes de seconde courbure de la surface initiale.

Si, dans celle-ci, les plans des lignes S enveloppent un cylindre, il en sera de même pour la nouvelle surface. Il résulte de là que les surfaces dont les lignes de première courbure appartiennent aux plans tangents d'un cône ou d'un cylindre, ont une génération commune au moyen des surfaces dont les lignes de courbure sont planes pour un système, et sphériques, pour l'autre.

V. — Cas général.

96. Considérons deux réseaux (S, T) (S', T') qui soient similaires. Nous avons défini (n° 75) les courbes correspondantes de ces deux réseaux, ainsi que les points dits correspondants.

Ceci posé, construisons le réseau résultant des réseaux similaires (S, T) (S', T') . Il est facile de démontrer directement que ce nouveau réseau jouit des mêmes propriétés que les deux premiers, et qu'il est similaire de chacun d'eux. Au surplus, cette proposition résulte d'une autre déjà vue, à savoir, que la résultante de deux surfaces possédant la même image sphérique que les deux composantes, est une surface ayant la même image sphérique.

Dans le cas particulier où les lignes S du réseau (S, T) sont des cercles, et où les lignes D' relatives au second réseau (S', T') sont concourantes, le réseau résultant (S'', T'') est d'abord relatif aux droites D du premier réseau. En outre, trois fonctions arbitraires interviennent dans la définition de ce réseau, savoir : deux fonctions relatives au réseau (S', T') et une troisième, correspondant au réseau (S, T) qui est assujéti à la condition d'être similaire d'un réseau donné. On voit par là que le réseau (S'', T'') , construit comme nous l'avons indiqué, est le plus général de son espèce. Toutefois, pour mettre hors de doute ce point important, nous démontrerons *directement* la réciproque que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. — *Tout réseau (S,T) est, d'une infinité de manières, le réseau résultant de deux réseaux similaires, tels que les lignes S du premier soient des cercles et que les lignes D du second soient concourantes.*

Le réseau (S,T) étant donné, construisons un réseau similaire (S',T') relatif aux mêmes droites D et dont les lignes S' soient des cercles, ce qui est possible d'une infinité de manières (n° 87).

On peut regarder le réseau (S,T) comme le résultant de (S',T') et d'un autre réseau (S'',T'') qui sera, à son tour, le résultant de (S,T) et du symétrique (S₁,T₁) de (S',T') par rapport à l'origine O. L'on voit d'abord que (S'',T'') est similaire de (S,T), et que les droites D'' passent par O, puisqu'elles sont les résultantes de droites symétriques par rapport à ce point.

Ainsi, toutes les parties de la proposition sont démontrées, et l'on en déduit que la construction du réseau (S,T) le plus général comporte les opérations suivantes.

Construction du réseau (S,T) le plus général.

97. 1° On construira un réseau (S,T) dont les lignes S soient des cercles passant par un point fixe O. A cet effet, on pourra prendre la figure inverse, relativement à O, de la figure formée par une courbe arbitraire Ω , le système de ses normales et les courbes qui lui sont parallèles. Les cercles S de ce réseau seront les transformées des normales, et les lignes T les courbes inverses de Ω et des courbes parallèles.

2° On tracera un réseau quelconque (S',T') similaire de (S,T) et dont les lignes S' soient des cercles. Pour cela (n° 78), on prendra une courbe quelconque C', pour lieu des centres des cercles S', et l'on fera correspondre, par parallélisme des tangentes, cette courbe à la courbe C, lieu des centres des cercles du premier réseau. En chaque point de C', le rayon du cercle S' sera déterminé par cette condition, que les rayons des cercles S et S', aux points correspondants de C et C', soient proportionnels aux rayons de courbure de ces deux courbes (n° 78).

3° On déduira, du premier réseau (S,T), le réseau similaire le plus général (S''T'') relatif aux mêmes droites D, en appliquant la construction du n° 94.

4° Enfin, le réseau demandé sera le réseau résultant (S''', T''') de (S', T') et (S'', T'') .

Les lignes S''' de ce réseau sont les résultantes des cercles S' et des lignes S'' . Elles sont, par suite, identiques aux lignes S'' ou à des courbes qui leur sont parallèles.

Les droites D''' du réseau résultant se confondent avec les droites D' du réseau (S', T') .

Si l'on enroule le réseau (S''', T''') sur une développable dont les rabattements des génératrices soient les droites D''' , on obtiendra la surface la plus générale dont les lignes de première courbure soient planes.

REMARQUE I. — La construction du réseau (S, T) le plus général ne donne lieu à aucune intégration. Mais si l'on veut en déduire la surface la plus générale dont les lignes de première courbure sont planes, on aura à faire une quadrature relative à la détermination d'une développable dont on connaît les rabattements des génératrices. Cette quadrature équivaut à la rectification d'une courbe. Ainsi la seconde solution que nous venons de donner du problème qui fait l'objet de cette étude, conduit aux conclusions développées dans le chapitre précédent.

Réseaux orthogonaux plans ou sphériques dont les lignes d'une famille sont des cercles.

REMARQUE II. — Dans l'introduction (IV), nous avons annoncé qu'il est possible de présenter la construction des réseaux orthogonaux plans ou sphériques dont les lignes d'une famille sont des cercles, de façon que les trajectoires orthogonales soient mises en évidence sans intégration d'aucune sorte. — Il nous reste maintenant à justifier cette assertion.

Les réseaux plans dont les lignes d'une famille sont circulaires, sont en même temps (n° 77), des réseaux (S, T) .

Or, il résulte du théorème que nous venons de démontrer la conclusion générale que voici :

Un réseau (S, T) quelconque étant donné, il existe une infinité de réseaux similaires dont les lignes S sont des cercles coupant orthogonalement un cercle fixe. On peut même supposer que les cercles du second réseau passent par un point fixe.

Donc, tout réseau (S, T) dont les lignes S sont des cercles, est le réseau

similaire d'une infinité de réseaux pour lesquels les lignes S sont des cercles passant par un point fixe.

La construction générale des réseaux dont nous nous occupons est dès lors la suivante :

Pour obtenir le réseau le plus général dont les lignes d'une famille soient des cercles, on prendra d'abord un réseau formé, pour un système, par des cercles ayant un point commun, et l'on construira, ensuite, d'après ce qui a été dit au n° 78, un réseau similaire (S, T) dont les lignes S soient des cercles.

Les trajectoires orthogonales des cercles étant mises en évidence dans le réseau initial, que l'on peut regarder comme la figure inverse d'un système de courbes parallèles et de leurs normales, il en résulte que les trajectoires orthogonales du réseau similaire seront pareillement connues.

Les réseaux plans étant ainsi construits, on en déduira les réseaux sphériques dont les lignes d'une famille sont des cercles, en prenant les figures inverses des premiers réseaux par rapport à un point quelconque de l'espace.

§ 4. — Rayons et centres de courbure principaux des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes. — Théorème de M. O. Bonnet.

Nous terminerons cette étude géométrique par la recherche des centres et des rayons de courbure principaux des surfaces à lignes de courbures planes pour un système. Nous serons ainsi conduit à présenter une démonstration géométrique d'un beau théorème donné par M. O. Bonnet, et qui est la généralisation de celui du n° 30.

Centres de première courbure.

98. On obtient immédiatement, à l'aide du théorème de Meusnier, le *centre de première courbure*, c'est-à-dire le point de rencontre des normales à la surface en deux points infiniment voisins pris sur une ligne de première courbure. En désignant par R_1 le rayon de première courbure de la surface en un point M, par ρ le rayon de courbure de la ligne S qui

passé en ce point, et enfin par θ l'angle sous lequel le plan de la ligne S coupe la surface, en tous les points de son intersection avec elle, on aura

$$R_1 = \frac{r}{\sin \theta}$$

Cet angle θ est fourni par la formule (2) du n° 74. Il sera donc complètement déterminé si l'on connaît le réseau (S,T) correspondant à la surface considérée, ainsi que la loi d'enroulement de la développable.

Nous rappellerons que le lieu des centres de première courbure en tous les points d'une ligne de courbure plane est une *hélice*.

Considérons, en effet, la développable formée par les normales à la surface en tous les points d'une ligne de courbure S, supposée plane. Cette développable admettra la ligne S pour ligne de courbure et, comme cette ligne est plane, toutes les autres lignes de courbure seront planes, de telle sorte que (n° 7) la développable aura une *hélice* pour arête de rebroussement. Cette arête est le lieu des centres de courbure de la surface le long de S, ce qui démontre la proposition.

On voit encore que la nappe de la développée qui reçoit les centres de première courbure est le lieu des hélices relatives à toutes les lignes de courbure S.

Centres de seconde courbure.

99. Proposons-nous maintenant de trouver le centre de seconde courbure en un point M, c'est-à-dire le point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins pris sur la ligne de seconde courbure qui passe en M.

Nous étudierons d'abord le cas particulier où la surface est une enveloppe de sphères. Dans ce cas, les développables circonscrites à la surface le long des cercles de courbure sont des cônes droits, et le sommet Ω de chacun de ces cônes est le centre d'une sphère passant par le cercle de courbure correspondant et coupant orthogonalement la surface.

Soient M et M', deux points infiniment voisins pris sur une ligne de seconde courbure. Considérons, en même temps, les cercles de courbure qui passent par ces points, ainsi que les sphères orthogonales correspondantes. Les normales à la surface aux points M et M' seront tangentes à ces sphères et leur point de rencontre appartiendra au plan radical de

ces sphères, car les distances des points M et M' à ce centre de courbure sont égales, aux infiniment petits du second ordre près.

Je dis maintenant que ce plan radical peut être déterminé directement. En effet, d'une part, les cercles de courbure contenus sur les sphères orthogonales, ont pour axe radical la droite D suivant laquelle le plan d'un de ces cercles touche son enveloppe, en sorte que le plan radical cherché passe par D . D'autre part, ce plan doit être perpendiculaire à la ligne des centres des sphères orthogonales, c'est-à-dire à la tangente en Ω à la courbe (Ω) , lieu des centres de ces sphères.

Donc, le centre de seconde courbure de la surface enveloppe de sphères en un point M' est situé à l'intersection de la normale en M à la surface, et du plan mené, par la droite suivant laquelle le plan du cercle de courbure passant en M touche son enveloppe, perpendiculairement à la tangente correspondante de la courbe, lieu des sommets des cônes droits circonscrits à la surface suivant les cercles de courbure.

Ce plan est le même en tous les points M d'un cercle de courbure et, par conséquent, les centres de seconde courbure de la surface proposée, en tous les points d'un cercle de courbure, sont situés sur un plan passant par la droite, suivant laquelle le plan du cercle de courbure touche son enveloppe.

100. Ceci posé, considérons une surface quelconque Σ dont les lignes de courbure S sont planes pour un système. Soit T , une ligne de seconde courbure. Les cercles osculateurs des courbes S aux points où elles sont rencontrées par T , appartiennent à une enveloppe de sphères E ayant la même image sphérique que Σ (n° 87). De plus, les centres de seconde courbure sont les mêmes tout le long de la ligne T pour la surface proposée et l'enveloppe de sphères. Donc, le centre de seconde courbure au point M d'intersection d'une certaine ligne S avec T est situé sur le plan P mené, par la droite D suivant laquelle le plan de S touche son enveloppe perpendiculairement à la tangente en Ω à la courbe (Ω) , lieu des sommets des cônes droits circonscrits à E , le long des cercles de courbure.

Le centre de courbure en un autre point M' de la même ligne S , serait de même situé sur un plan P' mené par D perpendiculairement à la tangente en Ω' à la courbe (Ω') , lieu des sommets des cônes droits circonscrits à une enveloppe de sphères E' analogue à E .

Or, les enveloppes de sphères E et E' ayant la même image sphérique, les tangentes aux courbes (Ω) et (Ω') aux points correspondants sont parallèles (n° 35). Par suite, les plans P et P' se confondent. On peut donc énoncer la proposition suivante, qui n'est autre que le théorème de M. O. Bonnet.

THÉOREME. — *Lorsque les lignes de première courbure d'une surface sont planes, les centres de seconde courbure, en tous les points d'une ligne de première courbure, sont situés sur un plan passant par la droite de contact du plan de cette ligne de courbure avec son enveloppe*

101. On peut déterminer la position de ce plan, en fonction des éléments du réseau plan (S,T) correspondant à la surface Σ , et de l'angle de contingence de la développable enveloppe des plans des lignes S. Considérons d'abord le cas d'une enveloppe E de sphères. Soient C et C', deux cercles de courbure infiniment voisins. Coupons la figure par le plan passant par les centres C et C' de ces deux cercles et perpendiculaire à leur axe radical en un point O. Soient OA et OA', les droites faisant entre elles l'angle de contingence $d\varepsilon$, suivant lesquelles ce plan coupe les plans des cercles.

Soient : $OC = x_0$, et r , le rayon du premier cercle; $OC' = x_0 + dx_0$ et $r + dr$, le rayon du second cercle. On a d'abord la relation,

$$x_0 dx_0 = r dr,$$

qui exprime que le point O est d'égale puissance par rapport aux deux cercles. En second lieu, on trouve aisément la formule

$$\text{Tg } \theta = r \frac{d\varepsilon}{dx_0} = x_0 \frac{d\varepsilon}{dr},$$

θ désignant l'angle sous lequel le plan du premier cercle coupe la surface.

D'autre part (n° 74), en faisant intervenir les éléments du réseau (S,T),

$$\text{Tg } \theta = \frac{1}{H} \frac{d\varepsilon}{da},$$

Prenons maintenant, dans le plan de la figure, deux axes rectangulaires, tels que OA soit l'axe des X. Les coordonnées du point Ω , sommet du cône droit circonscrit à la surface suivant le cercle de courbure C seront,

$$x_0, z_0 = -r \operatorname{Tg} \theta.$$

Les coordonnées du sommet Ω' du cône infiniment voisin seront, aux infiniments petits du troisième ordre près,

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 + dx_0 - (z_0 + dz_0) d\varepsilon \\ z'_0 &= (x_0 + dx_0) d\varepsilon + (z_0 + dz_0) \end{aligned}$$

En conséquence, le coefficient angulaire de la droite $\Omega\Omega'$ sera

$$\frac{x_0 d\varepsilon + dz_0}{dx_0 - z_0 d\varepsilon} = \frac{x_0 d\varepsilon - d(r \operatorname{Tg} \theta)}{dx_0 + r \operatorname{Tg} \theta d\varepsilon}.$$

Si l'on tient compte des relations écrites en commençant, cette expression devient égale à

$$= \frac{1}{H} \frac{d\theta}{da}.$$

Il en résulte que, si l'on désigne par μ l'angle que fait le plan du cercle, avec le plan passant par D et perpendiculaire à $\Omega\Omega'$, on aura

$$\operatorname{Tg} \mu = \left(\frac{H}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{da}.$$

Telle est la formule qui fait connaître, pour l'enveloppe E de sphères, l'angle que fait, avec le plan d'un cercle de courbure, le plan contenant les centres de seconde courbure de la surface, en tous les points de ce cercle de courbure.

Considérons maintenant une surface quelconque Σ dont les lignes de courbure soient planes pour un système, et la surface E enveloppe de sphères ayant pour cercles de courbure les cercles osculateurs des lignes S de Σ , aux points où elles sont rencontrées par une même ligne T. Pour Σ et E, les quantités H, θ et μ sont les mêmes.

Donc, la formule précédemment obtenue est générale et donne, pour une surface Σ quelconque, l'angle μ que fait, avec le plan d'une ligne S , le plan qui contient les centres de seconde courbure, en tous les points de cette ligne, ainsi que cela résulte du théorème de M. O. Bonnet.

§ 5. — Application aux surfaces de Joachimstal.

Indication de la marche à suivre dans le cas général.

102. J'indiquerai en quelques mots la marche à suivre pour trouver les formules générales relatives aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système.

Le résultat le plus simple, et, en même temps le plus complet connu jusqu'à présent, me paraît être la conséquence d'une Note de Joachimstal (*Journal de Crelle*, t. LIV), dans laquelle l'éminent géomètre, revenant sur le cas général traité par M. O. Bonnet, parvient très rapidement aux équations du problème, et montre ensuite, à l'aide d'une première intégrale déduite d'un théorème qui lui appartient (voir n° 2), que la solution est ramenée à l'intégration de *deux équations différentielles ordinaires*. Mais, comme on ne peut écrire les intégrales de ces équations tant qu'on n'a pas particularisé les fonctions arbitraires qu'elles contiennent, les formules obtenues ne sont pas explicites.

Au contraire, l'usage du théorème de M. Ribaucour et la considération des réseaux (S,T), permet d'exprimer explicitement, à une quadrature près, les coordonnées d'un point quelconque de l'une des surfaces étudiées, en fonction des paramètres de ses lignes de courbure.

Concevons, en effet, une développable arbitraire (D), dans les plans tangents de laquelle on veuille tracer des lignes S qui soient lignes de courbure d'une surface. Supposons, en outre, que chaque ligne S soit rapportée, dans le plan tangent qui la contient, à deux axes dirigés, l'un suivant la génératrice de contact du plan tangent, et l'autre, suivant la normale correspondante de l'arête de rebroussement. Désignons par X et Y les coordonnées, dans le plan tangent, d'un point quelconque de la courbe S correspondante, de telle sorte que X et Y seront des fonctions de deux paramètres, savoir du paramètre a définissant la généra-

Prenons maintenant, dans le plan de la figure, deux axes rectangulaires, tels que OA soit l'axe des X. Les coordonnées du point Ω , sommet du cône droit circonscrit à la surface suivant le cercle de courbure C seront,

$$x_0, z_0 = -r \operatorname{Tg} \theta.$$

Les coordonnées du sommet Ω' du cône infiniment voisin seront, aux infiniments petits du troisième ordre près,

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 + dx_0 - (z_0 + dz_0) d\varepsilon \\ z'_0 &= (x_0 + dx_0) d\varepsilon + (z_0 + dz_0) \end{aligned}$$

En conséquence, le coefficient angulaire de la droite $\Omega\Omega'$ sera

$$\frac{x_0 d\varepsilon + dz_0}{dx_0 - z_0 d\varepsilon} = \frac{x_0 d\varepsilon - d(r \operatorname{Tg} \theta)}{dx_0 + r \operatorname{Tg} \theta d\varepsilon}.$$

Si l'on tient compte des relations écrites en commençant, cette expression devient égale à

$$= \frac{1}{H} \frac{d\gamma}{da}.$$

Il en résulte que, si l'on désigne par γ l'angle que fait le plan du cercle, avec le plan passant par D et perpendiculaire à $\Omega\Omega'$, on aura

$$\operatorname{Tg} \mu = \left(\frac{d\gamma}{da} \right).$$

Telle est la formule qui fait connaître, pour l'enveloppe E de sphères, l'angle que fait, avec le plan d'un cercle de courbure, le plan contenant les centres de seconde courbure de la surface, en tous les points de ce cercle de courbure.

Considérons maintenant une surface quelconque Σ dont les lignes de courbure soient planes pour un système, et la surface E enveloppe de sphères ayant pour cercles de courbure les cercles osculateurs des lignes S de Σ , aux points où elles sont rencontrées par une même ligne T. Pour Σ et E, les quantités H, θ et μ sont les mêmes.

Donc, la formule précédemment obtenue est générale et donne, pour une surface Σ quelconque, l'angle μ que fait, avec le plan d'une ligne S , le plan qui contient les centres de seconde courbure, en tous les points de cette ligne, ainsi que cela résulte du théorème de M. O. Bonnet.

§ 5. — Application aux surfaces de Joachimstal.

Indication de la marche à suivre dans le cas général.

102. J'indiquerai en quelques mots la marche à suivre pour trouver les formules générales relatives aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système.

Le résultat le plus simple, et, en même temps le plus complet connu jusqu'à présent, me paraît être la conséquence d'une Note de Joachimstal (*Journal de Crelle*, t. LIV), dans laquelle l'éminent géomètre, revenant sur le cas général traité par M. O. Bonnet, parvient très rapidement aux équations du problème, et montre ensuite, à l'aide d'une première intégrale déduite d'un théorème qui lui appartient (voir n° 2), que la solution est ramenée à l'intégration de *deux équations différentielles ordinaires*. Mais, comme on ne peut écrire les intégrales de ces équations tant qu'on n'a pas particularisé les fonctions arbitraires qu'elles contiennent, les formules obtenues ne sont pas explicites.

Au contraire, l'usage du théorème de M. Ribaucour et la considération des réseaux (S,T), permet d'exprimer explicitement, à une quadrature près, les coordonnées d'un point quelconque de l'une des surfaces étudiées, en fonction des paramètres de ses lignes de courbure.

Concevons, en effet, une développable arbitraire (D), dans les plans tangents de laquelle on veuille tracer des lignes S qui soient lignes de courbure d'une surface. Supposons, en outre, que chaque ligne S soit rapportée, dans le plan tangent qui la contient, à deux axes dirigés, l'un suivant la génératrice de contact du plan tangent, et l'autre, suivant la normale correspondante de l'arête de rebroussement. Désignons par X et Y les coordonnées, dans le plan tangent, d'un point quelconque de la courbe S correspondante, de telle sorte que X et Y seront des fonctions de deux paramètres, savoir du paramètre a définissant la généra-

trice de la développable, et d'une autre quantité b dont la variation produit chacune des lignes S.

Prenons maintenant trois axes rectangulaires fixes et soient : 1° x_0, y_0, z_0 , les coordonnées d'un point A de l'arête de rebroussement de la développable (D); 2° α, β, γ , les angles directeurs de la tangente en A suivant laquelle est dirigée l'axe des abscisses du plan tangent; 3° α', β', γ' , les angles directeurs de la normale principale de l'arête de rebroussement.

Ceci posé, les coordonnées x, y, z , par rapport aux trois axes fixes, du point de la ligne S dont les coordonnées, dans le plan tangent, sont X et Y, seront données par les formules :

$$\begin{cases} x = x_0 + X \cos \alpha + Y \cos \alpha' \\ y = y_0 + X \cos \beta + Y \cos \beta' \\ z = z_0 + X \cos \gamma + Y \cos \gamma' \end{cases}$$

La question est ainsi ramenée à trouver X et Y.

A cet effet, conformément à la solution géométrique que l'on vient d'exposer, on appliquera la développable (D) sur un plan, en supposant que chaque plan tangent entraîne la ligne correspondante. Dans cette déformation, les coordonnées X et Y ne changent pas, et les lignes de courbure deviendront les lignes S d'un réseau (S,T).

La construction générale du paragraphe 3 fournira, non seulement les équations relatives aux lignes S et T avec les fonctions arbitraires qu'elles doivent contenir, mais encore les valeurs de X et de Y exprimées au moyen des paramètres caractéristiques des courbes du réseau.

Cela fait, on reconstituera une développable (D) connaissant la transformée plane de son arête de rebroussement. Cette opération conduit à une seule quadrature, portant sur une nouvelle fonction arbitraire, et à l'aide de laquelle on obtiendra x_0, y_0, z_0 ainsi que le six cosinus. La substitution de ces valeurs dans les équations écrites plus haut donnera enfin les formules demandées. Les cas où (D) devient un cône ou un cylindre n'exigent que des modifications bien simples sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'insister.

Après ces généralités, j'arrive à l'application qui fait l'objet de ce paragraphe.

Équations des réseaux (S,T) relatifs aux surfaces de Joachimstal.

103. On a vu (n° 90) que les réseaux (S,T) relatifs aux surfaces dont les lignes de courbure passent par une droite D sont formés, pour les lignes T, de cercles ayant leurs centres sur D, et pour les lignes S, des trajectoires orthogonales de ces cercles.

Preñons, dans le plan du rabattement, un système d'axes rectangulaires, tel que l'axe des x se confonde avec D. Soit b l'abscisse du centre C d'un cercle quelconque T du système, et r , son rayon qui doit être regardé comme étant fonction de b . Un point quelconque M de ce cercle sera défini par l'angle ω que forme, avec le diamètre couché sur O x , la droite qui joint ce point à l'une des extrémités A ou B de ce diamètre. Pour fixer les idées, nous prendrons l'extrémité B dont l'abscisse est $b + r$, et nous poserons $\omega = \widehat{MBA}$. En désignant par X et Y les coordonnées de M, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} X = b - r \cos 2\omega \\ Y = r \sin 2\omega \end{cases}$$

Si l'on fait varier b et ω suivant une loi quelconque, c'est-à-dire en leur imposant telle relation qu'on voudra, le point M décrira une courbe à travers le système des cercles. Nous nous proposons de trouver *directement* la relation qui doit exister entre b et ω pour que cette courbe coupe orthogonalement tous les cercles.

Les accroissements ΔX et ΔY des coordonnées du point M, sont

$$\begin{aligned} \Delta X &= db - dr \cos 2\omega + 2r \sin 2\omega d\omega \\ \Delta Y &= dr \sin 2\omega + 2r \cos 2\omega d\omega, \end{aligned}$$

en supposant que b et ω varient simultanément.

Nous obtiendrons l'équation différentielle des trajectoires orthogonales S des cercles T, en exprimant que le déplacement du point M est dirigé suivant le rayon du cercle, ce qui donne l'équation de condition

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = - \operatorname{Tg} 2\omega,$$

ou

$$\Delta Y \cos 2\omega + \Delta X \sin 2\omega = 0;$$

laquelle devient, après substitution,

$$(2) \quad db \sin 2\omega + 2r d\omega = 0.$$

Pour l'intégrer, nous observerons que r étant une fonction de la seule variable b , nous pouvons poser

$$(3) \quad r = \frac{B}{B'},$$

B désignant une fonction de b seule, et B' , sa dérivée. En substituant, on a l'équation

$$\frac{2d\omega}{\sin 2\omega} = \frac{B'}{B} db,$$

dont l'intégrale est

$$(4) \quad B \operatorname{Tg} \omega = a,$$

a désignant une constante arbitraire.

L'équation (4) est l'équation, en termes finis, des lignes S du réseau. A chaque valeur de a correspond une de ces lignes.

Les différents points du réseau (S, T) sont définis par les équations (1), où b et ω désignent deux variables. Si b reste constant, ω prenant toutes les valeurs possibles, les équations (1) représentent le cercle du système dont le centre a pour abscisse b . Si b et ω varient de manière à vérifier l'équation (4) où a reçoit une valeur déterminée, les équations (1) définissent la ligne S qui correspond à cette valeur de a . On est ainsi conduit à remplacer la variable ω par la nouvelle variable a , liée aux deux premières par l'équation (4). Si l'on observe maintenant que

$$\sin 2\omega = \frac{2 \operatorname{Tg} \omega}{1 + \operatorname{Tg}^2 \omega},$$

$$\cos 2\omega = \frac{1 - \operatorname{Tg}^2 \omega}{1 + \operatorname{Tg}^2 \omega},$$

les formules (1) donneront, après avoir remplacé r par $\frac{B}{B'}$,

$$(5) \quad \begin{cases} X = b - \frac{B(B^2 - a^2)}{B'(B^2 + a^2)}, \\ Y = \frac{2a B^2}{B'(B^2 + a^2)}. \end{cases}$$

Si dans ces équations, on suppose que b soit constant et que a varie, elles représenteront le cercle T de la série dont l'abscisse du centre est b . Si l'on suppose, au contraire, que a reste fixe et que b prenne toutes les valeurs possibles, les équations (5) représenteront la ligne S relative à cette valeur de a .

Les différents systèmes de cercles ayant leurs centres sur une droite D, se distinguent entre eux par la relation qui existe entre le rayon d'un cercle et l'abscisse b de son centre. Dès lors, si l'on regarde B comme une fonction arbitraire de b , les équations (5) sont relatives au réseau (S,T) le plus général, ayant pour lignes T des cercles dont les centres sont situés sur Ox et qui correspondent aux valeurs constantes de b , tandis que leurs trajectoires orthogonales S correspondent aux valeurs constantes de a .

Équations générales des surfaces de Joachimstal.

104. Le réseau (S,T) étant obtenu, il suffira, pour construire l'une quelconque des surfaces de Joachimstal qu'il peut engendrer, de faire tourner les diverses courbes S autour de Ox, de manière que leurs plans fassent entre eux des angles variant suivant une loi continue quelconque.

Considérons la ligne S fournie par une certaine valeur de a et définie par les équations (5). Après les rotations dont nous venons de parler, le plan de cette ligne fait avec le plan xoy un angle A qui dépend uniquement de a . En choisissant un axe Oz perpendiculaire au plan xoy , et, en désignant par x, y, z , les coordonnées, dans sa nouvelle position, du point de S qui, dans le plan du rabattement, avait pour coordonnées X et Y, on aura

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \cos A \\ z = Y \sin A \end{cases}$$

Si, dans ces équations, on remplace X et Y par les valeurs (5), il viendra, pour les coordonnées d'un point quelconque de la surface de Joachimstal,

$$(6) \quad \begin{cases} x = b - \frac{B(B^2 - a^2)}{B'(B^2 + a^2)} \\ y = \frac{2aB^2}{B'(B^2 + a^2)} \cos A \\ z = \frac{2aB^2}{B'(B^2 + a^2)} \sin A \end{cases} .$$

Ces équations, dans lesquelles on regardera a et b comme deux variables indépendantes, et A et B , comme des fonctions, d'ailleurs quelconques, de chacun de ces paramètres respectivement, sont relatives à une surface quelconque dont les lignes de première courbure appartiennent à des plans passant par Ox .

Ces lignes de première courbure correspondent aux valeurs constantes de a , et l'on vérifie sans peine, que chacune d'elles est dans un plan passant par Ox , car l'on déduit des équations (6).

$$\frac{y}{z} = \cot A .$$

Les lignes de courbure du second système correspondent aux valeurs constantes de b . On peut vérifier qu'elles appartiennent aux sphères ayant pour grands cercles les cercles T du réseau. Les équations (6) donnent effectivement

$$(x - b)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{B}{B'} \right)^2 ,$$

et cette dernière montre que, b restant constant, le point de la surface se meut sur une sphère ayant son centre sur Ox et dont le rayon est égal à $\frac{B}{B'}$.

Les équations (6) ne diffèrent que par la notation, des équations données par M. O. Bonnet (*l. c.*, p. 190), quand on fait disparaître de ces dernières les imaginaires qu'elles contiennent. On peut également les comparer avec celles que Joachimstal a lui-même données dans l'article dont il a été question ci-dessus.

Plans tangents et normales.

105. Pour déterminer le plan tangent et la normale, en un point quelconque, nous utiliserons les considérations géométriques employées dans ce chapitre, ainsi que les valeurs de Tg^1 (n° 74) et de Tg^2 (n° 101).

En premier lieu, il s'agit de trouver la fonction H relative au réseau (S,T).

L'arc de cercle ds compris entre deux lignes S et S' infiniment voisines, a pour valeur

$$ds = 2r d\omega = \frac{2 Y d\omega}{\sin 2\omega} .$$

Puisque, d'après (4),

$$Tg\omega = \frac{a}{B} ,$$

on aura, b restant fixe,

$$d\omega = \frac{1}{B} \frac{da}{1 + Tg^2\omega} = \frac{B da}{B^2 + a^2} .$$

D'autre part,

$$\sin 2\omega = \frac{2a B}{B^2 + a^2} .$$

Par suite,

$$ds = \frac{Y}{a} da .$$

Donc, en vertu de la définition de H , on aura simplement (n° 71)

$$(7) \quad H = \frac{1}{a} ,$$

ce qui fournit l'interprétation géométrique de la variable a .

Si l'on désigne maintenant par θ l'angle sous lequel le plan d'une ligne

de courbure S coupe la surface, on aura, d'après la formule (2) du n° 74, savoir :

$$\begin{aligned} \text{Tg} \theta &= \frac{1}{H} \frac{dz}{da} . \\ (8) \quad \text{Tg} \theta &= A' . a ; \end{aligned}$$

car l'angle $d\varepsilon$ que forment entre eux les plans de deux lignes de courbure infiniment voisines est égal, dans ce cas, à $dA = A da$, A' désignant la dérivée de A .

L'équation (8) définit le plan tangent et, par suite, la normale en un point quelconque de la surface. Il est plus simple cependant de trouver les équations de cette dernière, à l'aide des considérations suivantes :

Les sphères qui contiennent les lignes de seconde courbure coupent orthogonalement la surface. Donc, la normale, en un point quelconque, est située dans le plan tangent à la sphère qui contient la ligne de seconde courbure passant en ce point, ainsi que dans le plan normal à cette dernière ligne. La sphère considérée ayant pour équation (n° 104) :

$$(x - b)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{B}{B'} \right)^2 ,$$

il en résulte que si l'on désigne par ξ, η, ζ , les coordonnées courantes de la normale au point x, y, z de la surface, les équations de cette droite seront :

$$(8) \quad \begin{cases} (\xi - x)(x - b) + (\eta - y)y + (\zeta - z)z = 0 \\ (\xi - x) \frac{dx}{da} + (\eta - y) \frac{dy}{da} + (\zeta - z) \frac{dz}{da} = 0 ; \end{cases}$$

car la première représente le plan tangent à la sphère, et la seconde le plan normal à la ligne de seconde courbure. On a, d'ailleurs :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dx}{da} = 4 \cdot \frac{B}{B'} \cdot \frac{a B^2}{(B^2 + a^2)^2} , \\ \frac{dy}{da} = \frac{2 B^2}{B' (B^2 + a^2)} \left[\cos A \frac{B^2 - a^2}{B^2 + a^2} - a A' \sin A \right] \\ \frac{dz}{da} = \frac{2 B^2}{B' (B^2 + a^2)} \left[\sin A \frac{B^2 - a^2}{B^2 + a^2} + a A' \cos A \right] . \end{cases}$$

Centres et rayons principaux de première courbure.

106. Si l'on désigne par F le centre de première courbure, c'est-à-dire le point de rencontre des normales en deux points infiniment voisins M et M' pris sur une ligne de première courbure, les droites FM et FM' seront égales, et comme elles sont tangentes aux sphères passant en M et M' et contenant les lignes de seconde courbure, le point F appartiendra au plan radical de ces deux sphères. Ce plan radical ayant pour équation :

$$x = b - \frac{B}{B'} \cdot \left(\frac{B}{B'} \right)',$$

où $\left(\frac{B}{B'} \right)'$ désigne la dérivée du rapport $\frac{B}{B'}$, on peut énoncer la proposition suivante :

Les centres principaux de première courbure d'une surface de Joachimstal, le long d'une ligne de seconde courbure, sont contenus sur le plan radical de la sphère qui passe par cette ligne de seconde courbure, et de la sphère infiniment voisine.

Les coordonnées de ce centre de première courbure s'obtiendront aisément, en remarquant que l' x de ce point est connue, et que, d'un autre côté, le point est sur la normale représentée par les équations (8). On trouve d'abord, en désignant par ξ_1, η_1, ζ_1 , les coordonnées de ce centre.

$$\begin{cases} \xi_1 - x = \frac{B}{B'} \left[\frac{B^2 - a^2}{B^2 + a^2} - \left(\frac{B}{B'} \right)' \right] \\ \eta_1 - y = \left[\frac{B^2 - a^2}{B^2 + a^2} - \left(\frac{B}{B'} \right)' \right] \frac{(B^2 + a^2) \sin A + a A' \cos A (B^2 - a^2)}{2a^2 A' B'} \\ \zeta_1 - z = \left[\frac{B^2 - a^2}{B^2 + a^2} - \left(\frac{B}{B'} \right)' \right] \frac{a A' \sin A (B^2 - a^2) - (B^2 + a^2) \cos A}{2a^2 A' B'} \end{cases}$$

Il en résulte, pour la valeur R_1 du rayon principal de première courbure,

$$R_1^2 = \left[B^2 - a^2 - \left(\frac{B}{B'} \right)' (B^2 + a^2) \right]^2 \frac{1 + a^2 A'^2}{4 a^4 A'^2 B'^2},$$

et si l'on remarque que, d'après (8),

$$a A' = Tg\theta ,$$

on obtient la valeur absolue de R_1 , savoir :

$$(10) \quad R_1 = \frac{B^2 - a^2 - \left(\frac{B}{B'}\right)' (B^2 + a^2)}{2a B'} \cdot \frac{1}{\sin \theta} ;$$

Si dans les formules qui donnent $\xi_1 = x$, $\eta_1 = y$, $\zeta_1 = z$, on remplace x , y , z par leurs valeurs (6), on obtiendra les coordonnées du centre de première courbure, en fonction de a et b . Après quelques réductions, il vient :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = b - \left(\frac{B}{B'}\right) \left(\frac{B}{B'}\right)' \\ \eta_1 = \frac{a A' \cos A \left[B^2 + a^2 - \left(\frac{B}{B'}\right)' (B^2 - a^2) \right] + \sin A \left[B^2 - a^2 - \left(\frac{B}{B'}\right)' (B^2 + a^2) \right]}{2a^2 A' B'} \\ \zeta_1 = \frac{a A' \sin A \left[B^2 + a^2 - \left(\frac{B}{B'}\right)' (B^2 - a^2) \right] - \cos A \left[B^2 - a^2 - \left(\frac{B}{B'}\right)' (B^2 + a^2) \right]}{2a^2 A' B'} \end{array} \right.$$

Les équations (11) représentent la première nappe de la développée de la surface considérée, lorsqu'on fait varier a et b . Si l'on donne à a une valeur constante, les équations (11) représenteront le lieu des centres de première courbure suivant la ligne de courbure (a). Cette courbe, qui est une hélice (n° 98), est en même temps une géodésique de la développée. Au contraire, b conservant une valeur constante, les équations (11) donnent le lieu des centres de première courbure, le long d'une ligne de seconde courbure. Ce lieu est situé, comme on sait, dans un plan perpendiculaire à Ox .

Centres et rayons principaux de seconde courbure.

107. Nous utiliserons le théorème et la formule du n° 101, savoir :

$$Tg\mu = \frac{H}{\left(\frac{d\theta}{da}\right)} ,$$

pour déterminer le centre de seconde courbure en un point de la surface, sachant que μ désigne l'angle que fait, avec le plan d'une ligne S, le plan qui passe par le centre cherché et la ligne d'intersection du plan de S avec le plan de la ligne infiniment voisine S'. Dans le cas actuel, on a :

$$\text{Tg} \mu = \frac{1 + a^2 A'^2}{a (A' + a A'')}.$$

Ceci posé, le plan d'une ligne S passe par Ox et fait l'angle A avec le plan xoy, tandis que le plan qui contient Ox et le centre de courbure cherché fait l'angle μ avec le plan de la ligne S considérée. Ce centre est donc dans le plan représenté par l'équation

$$\zeta = r \text{Tg} (A + \mu).$$

En joignant à cette équation les équations de la normale, on trouvera les coordonnées du point demandé, que nous désignerons par ξ_2, η_2, ζ_2 .

On aura d'abord :

$$\begin{cases} \xi_2 - x = -\frac{4a B^2}{B'} \frac{a A' \cdot \text{Tg} \mu \cdot a B}{(B^2 + a^2) [(B^2 + a^2) + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu]} \\ \eta_2 - y = -\frac{2a B^2 \text{Tg} \mu [\sin A (B^2 + a^2) + a A' \cos A (B^2 - a^2)]}{B' (B^2 + a^2) [B^2 + a^2 + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu]} \\ \zeta_2 - z = \frac{2a B^2 \text{Tg} \mu [\cos A (B^2 + a^2) - a A' \sin A (B^2 - a^2)]}{B' (B^2 + a^2) [B^2 + a^2 + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu]} \end{cases}$$

On déduira de ces formules la longueur R_2 du rayon de seconde courbure, qui est, en valeur absolue :

$$(12) \quad R_2 = \frac{2a B^2}{B'} \frac{\text{Tg} \mu}{\cos \theta [(B^2 + a^2) + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu]}$$

Il viendra enfin, pour les coordonnées ξ_2, η_2, ζ_2 du centre de seconde courbure, les formules que voici :

$$(13) \quad \begin{cases} \xi_2 = b - \frac{B}{B'} \frac{B^2 - a^2 + a A' (B^2 + a^2) \text{Tg} \mu}{B^2 + a^2 + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu} \\ \eta_2 = \frac{2a B^2}{B'} \frac{\cos A - \sin A \text{Tg} \mu}{B^2 + a^2 + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu} \\ \zeta_2 = \frac{2a B^2}{B'} \frac{\sin A + \cos A \text{Tg} \mu}{B^2 + a^2 + a A' (B^2 - a^2) \text{Tg} \mu} \end{cases}$$

La nappe de la développée, lieu des centres de seconde courbure, est représentée par les équations précédentes, où a et b prennent toutes les valeurs possibles.

Cas particuliers.

108. Quel que soit le réseau (S,T), on peut déterminer la fonction A de a , de façon que les plans des lignes de première courbure coupent la surface sous le même angle. D'après la valeur (8) de $Tg\theta$, on doit avoir

$$a A' = K ,$$

K désignant une constante. On en déduit

$$A = \text{Log.} \frac{a^K}{h} ,$$

h désignant une constante. Si A reçoit cette valeur, ou ce qui revient au même, si, prenant A pour variable indépendante, on fait

$$a = \frac{e^{\frac{A}{K}}}{h} ,$$

on aura

$$Tg\theta = K .$$

De plus, $Tg\mu$ sera infinie et l'angle μ sera droit.

Les équations de la seconde nappe de la développée deviennent, dans ce cas,

$$(14) \quad \begin{cases} \xi_2 = b - \frac{B}{B'} \frac{B^2 + a^2}{B^2 - a^2} \\ \eta_2 = - \frac{2a B^2}{B'} \frac{\sin A}{B^2 - a^2} \\ \zeta_2 = \frac{2a B^2}{B'} \frac{\cos A}{B^2 - a^2} \end{cases}$$

La valeur de R_2 se simplifie, et l'on a

$$(15) \quad R_2 = \frac{2a B^2}{B' (B^2 - a^2) \sin \theta}$$

Des équations (14), on déduit la relation

$$(\xi_2 - b)^2 = r_2^2 - z_2^2 = \left(\frac{B}{B'}\right)^2.$$

Les surfaces particulières que nous considérons possèdent donc cette propriété : que *le lieu des centres de seconde courbure, suivant une ligne de courbure sphérique, appartient à une hyperboloïde de révolution à deux nappes circonscrit à la sphère contenant cette ligne de courbure.*

Pour particulariser encore davantage, considérons le cas dans lequel les rayons des sphères sont égaux. Alors $r = c$ et, par suite, d'après l'équation (3) du n° 103, on a

$$B = e^{\frac{b}{c}}.$$

Les lignes S sont des courbes dont la tangente comptée jusqu'à Ox , est constamment égale à c , c'est-à-dire des *tractrices égales*.

Si l'on suppose, en outre, que l'on ait fait tourner les plans des lignes S de façon que l'angle θ soit constant, les formules (10) et (15) montrent que

$$R_1 = \frac{B^2 - a^2}{2a B'} \frac{1}{\sin \theta}$$

$$R_2 = \frac{2a B^2}{B' (B^2 - a^2)} \frac{1}{\sin \theta},$$

et, par suite, que

$$R_1 R_2 = \left(\frac{B}{B'}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{c^2}{\sin^2 \theta}.$$

Le produit des rayons de courbure principaux est donc constant en valeur absolue. Seulement, ces deux rayons sont dirigés en sens contraires, ainsi qu'on le voit aisément à l'aide des valeurs de $\xi_1 - x$ et $\xi_2 - x$ données aux n°s 106 et 107.

Ainsi, pour la surface étudiée, la courbure de Gauss est constante et négative, d'où il résulte que cette surface est applicable sur la surface de

révolution engendrée par une tractrice tournant autour de sa base, la tangente, comptée jusqu'à cette base, étant $\frac{c}{\sin \theta}$.

Donc :

Il existe une surface de Joachimstal dont les lignes de seconde courbure sont situées sur des sphères égales et dont les lignes de première courbure, qui sont des tractrices égales, appartiennent à des plans coupant la surface sous le même angle. Cette surface est applicable sur une surface de révolution ayant pour méridienne une autre tractrice.

Montpellier, le 8 juillet 1882.

VU ET APPROUVÉ :

Le Doyen,

P. DE ROUVILLE.

PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Montpellier,

G. CHANCEL.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

Étude complète du mémoire de Jacobi, ayant pour titre :

*Nova methodus, æquationes differentiales partiales primi ordinis
inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.*

Montpellier, le 8 juillet 1882.

VU ET APPROUVÉ :

Le Doyen,

P. DE ROUVILLE.

PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Montpellier,

G. CHANCEL.

TOULOUSE — IMPRIMERIE DOULADOURE-PRIVAT, RUE SAINT-ROME, 39
